

## CHAPITRE 11

# Matériau Composite en-dehors de ses Axes Principaux

## 11.1 RELATIONS D'ELASTICITÉ DANS UN SYSTÈME D'AXES QUELCONQUE

### 11.1.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel (chapitre 9) ou tissu (chapitre 10), exprimé dans les directions principales : un axe suivant la direction des fibres ou de la chaîne, les deux autres axes étant orthogonaux. Or, nous avons vu (chapitre 3) que les stratifiés étaient élaborés par couches successives, dont la direction des fibres ou de la chaîne est décalée d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est alors nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Dans ce chapitre, nous considérons donc (figure 11.1) une couche de matériau unidirectionnel ou tissu de directions principales (1, 2, 3), le plan (1, 2) étant confondu avec le plan de la couche, et la direction 1 confondue avec la direction des fibres ou de la chaîne. L'objectif de ce chapitre est de caractériser les propriétés élastiques de la couche, en les exprimant dans le système d'axes de référence (1', 2', 3) du stratifié, la direction des fibres ou de la chaîne faisant un angle  $\theta$  avec la direction 1'. Ce système d'axes est usuellement référencé comme système (x, y, z). Par la suite, nous utiliserons indifféremment les deux notations : (1', 2', 3) = (x, y, z). La première est mieux adaptée à la notation matricielle et plus pratique pour effectuer les changements de base. La seconde notation différencie le système d'axes propres (1, 2, 3) = (L, T, T') du matériau unidirectionnel ou tissu du système usuel (x, y, z) de coordonnées cartésiennes du mécanicien.

### 11.1.2 Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'une couche, rapporté à ses axes principaux, est donné par les relations (9.5) à (9.6) pour une couche unidirectionnelle, et

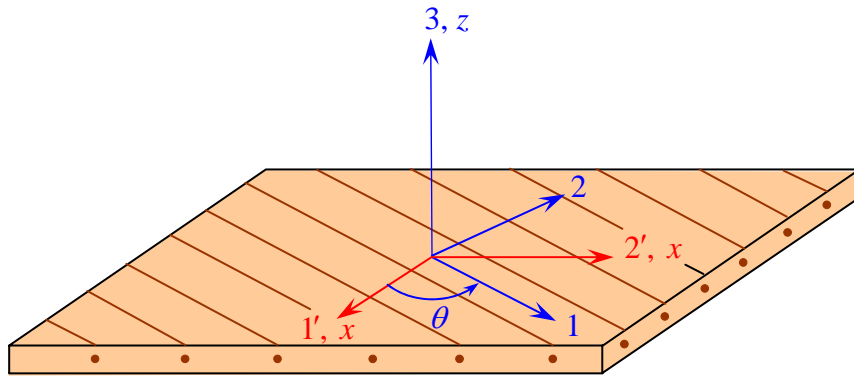


FIGURE 11.1. Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence (1', 2', 3) = (x, y, z) du stratifié.

(10.1) à (10.2) pour une couche avec renfort tissu. Les matrices de rigidité  $\mathbf{C}'$  et de souplesse  $\mathbf{S}'$ , exprimées dans la base (1', 2', 3), sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse, rapportées à la base (1, 2, 3), les relations de changement de base (7.9) à (7.12). Pour appliquer ici ces relations, il est nécessaire de bien faire attention au fait que le changement de base : (1, 2, 3)  $\rightarrow$  (1', 2', 3) se fait, dans le cas présent, par une rotation d'angle  $-\theta$ . Les relations à utiliser sont les relations (7.11) et (7.12) qui s'écrivent ici :

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}_{\sigma}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_{\sigma} , \quad (11.1)$$

et

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}_{\varepsilon}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}_{\varepsilon} . \quad (11.2)$$

Ces relations, associées aux expressions (5.46), (5.48), (6.43) et (6.45), permettent de déterminer la matrice de rigidité  $\mathbf{C}'$  et la matrice de souplesse  $\mathbf{S}'$  exprimées dans la base (1', 2', 3). Ces matrices s'écrivent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} ,$$

avec  $A_{ij} = C'_{ij}$  ou  $S'_{ij}$ . Les expressions des constantes de rigidité et de souplesse dans le système d'axes (1', 2', 3), obtenues à partir des relations (11.1) et (11.2), sont reportées dans les tableaux (11.1) et (11.2) pour un composite unidirectionnel, et dans les tableaux (11.3) et (11.4) pour un composite avec renfort tissu.

TABLEAU 11.1. Constantes de rigidité d'un composite unidirectionnel, dont la direction des fibres fait un angle  $\theta$  avec la direction  $x$  de référence (figure 11.1).

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
C'_{13} &= C_{12} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta, \\
C'_{14} &= 0, & C'_{15} &= 0, \\
C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\
C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
C'_{23} &= C_{12} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta, \\
C'_{24} &= 0, & C'_{25} &= 0, \\
C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\
C'_{33} &= C_{22}, & C'_{34} &= 0, & C'_{35} &= 0, \\
C'_{36} &= (C_{12} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta, \\
C'_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta, \\
C'_{45} &= \left[ C_{66} - \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \right] \sin \theta \cos \theta, & C'_{46} &= 0, \\
C'_{55} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \sin^2 \theta + C_{66} \cos^2 \theta, & C'_{56} &= 0, \\
C'_{66} &= \left[ C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66}) \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).
\end{aligned}$$

Les relations d'élasticité, rapportées aux axes  $(1', 2', 3)$ , s'écrivent donc sous une des deux formes, en fonction des constantes de rigidité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (11.3)$$

TABLEAU 11.2. Constantes de souplesse d'un composite unidirectionnel, hors de ses axes principaux.

$$\begin{aligned}
S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
S'_{13} &= S_{12} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta, \\
S'_{14} &= 0, & S'_{15} &= 0, \\
S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta, \\
S'_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
S'_{23} &= S_{12} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta, \\
S'_{24} &= 0, & S'_{25} &= 0, \\
S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta, \\
S'_{33} &= S_{22}, & S'_{34} &= 0, & S'_{35} &= 0, \\
S'_{36} &= 2(S_{12} - S_{23}) \sin \theta \cos \theta, \\
S'_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}) \cos^2 \theta + S_{66} \sin^2 \theta, \\
S'_{45} &= [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})] \sin \theta \cos \theta, & S'_{46} &= 0, \\
S'_{55} &= 2(S_{22} - S_{23}) \sin^2 \theta + S_{66} \cos^2 \theta, & S'_{56} &= 0, \\
S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).
\end{aligned}$$

ou en fonction des constantes de souplesse :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (11.4)$$

TABLEAU 11.3. Constantes de rigidité d'un matériau orthotrope, dont la direction principale 1 (ou  $L$ ) fait un angle  $\theta$  avec la direction  $x$  de référence (figure 11.1).

---


$$C'_{11} = C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$C'_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$$

$$C'_{13} = C_{13} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta,$$

$$C'_{14} = 0, \quad C'_{15} = 0,$$

$$C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta,$$

$$C'_{22} = C_{11} \sin^4 \theta + C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$C'_{23} = C_{13} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta,$$

$$C'_{24} = 0, \quad C'_{25} = 0,$$

$$C'_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$C'_{33} = C_{33}, \quad C'_{34} = 0, \quad C'_{35} = 0,$$

$$C'_{36} = (C_{13} - C_{23}) \sin \theta \cos \theta,$$

$$C'_{44} = C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta,$$

$$C'_{45} = (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta, \quad C'_{46} = 0,$$

$$C'_{55} = C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta, \quad C'_{56} = 0,$$

$$C'_{66} = [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$$


---

TABLEAU 11.4. Constantes de souplesse d'un matériau orthotrope, hors de ses axes principaux.

---

$S'_{11} = S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$		
$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$		
$S'_{13} = S_{13} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta,$		
$S'_{14} = 0,$	$S'_{15} = 0,$	
$S'_{16} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta,$		
$S'_{22} = S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$		
$S'_{23} = S_{13} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta,$		
$S'_{24} = 0,$	$S'_{25} = 0,$	
$S'_{26} = [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] \sin^3 \theta \cos \theta + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] \sin \theta \cos^3 \theta,$		
$S'_{33} = S_{33},$	$S'_{34} = 0,$	$S'_{35} = 0,$
$S'_{36} = 2(S_{13} - S_{23}) \sin \theta \cos \theta,$		
$S'_{44} = S_{44} \cos^2 \theta + S_{55} \sin^2 \theta,$		
$S'_{45} = (S_{55} - S_{44}) \sin \theta \cos \theta,$		$S'_{46} = 0,$
$S'_{55} = S_{44} \sin^2 \theta + S_{55} \cos^2 \theta,$		$S'_{56} = 0,$
$S'_{66} = 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$		

---

En comparant les expressions des tableaux 11.1 à 11.4, nous constatons que les expressions relatives à un matériau unidirectionnel et à un matériau orthotrope sont identiques pour les termes  $C'_{ij}$  ou  $S'_{ij}$  avec  $i, j = 1, 2, 6$ . Par exemple :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{relations identiques} & & \text{relations différentes} \\
 \swarrow & & \swarrow \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 C'_{11} & C'_{12} & C'_{16} & C'_{13} & 0 & 0 \\
 C'_{12} & C'_{22} & C'_{26} & C'_{23} & 0 & 0 \\
 C'_{16} & C'_{26} & C'_{66} & C'_{36} & 0 & 0 \\
 \hline
 C'_{13} & C'_{23} & C'_{36} & C'_{33} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55}
 \end{array} \right] & & (11.5)
 \end{array}$$

### 11.1.3 Autres expressions des matrices de rigidité

Les expressions des constantes de rigidité et de souplesse hors axes peuvent être réécrites en introduisant les angles multiples de  $\theta$ . En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \cos^4 \theta &= \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta), & \cos^3 \theta \sin \theta &= \frac{1}{8}(2 \sin 2\theta + \sin 4\theta), \\
 \cos^2 \theta \sin^2 \theta &= \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta), & \cos \theta \sin^3 \theta &= \frac{1}{8}(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta), \\
 \sin^4 \theta &= \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta), & \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} \sin 2\theta, \\
 \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), & \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta).
 \end{aligned}$$

Ces relations nous permettent par exemple d'écrire :

$$\begin{aligned}
 C'_{11} &= \frac{1}{8}(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}) + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22})\cos 2\theta \\
 &\quad + \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66})\cos 4\theta.
 \end{aligned}$$

Soit :

$$C'_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta,$$

en posant :

$$U_1 = \frac{1}{8}(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}),$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}),$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}).$$

Des transformations identiques peuvent être opérées pour chaque constante. Les résultats obtenus dans le cas d'un composite unidirectionnel sont reportés dans le tableau 11.5. L'intérêt de ces relations est de mettre en évidence les termes qui sont invariants lors d'une rotation  $\theta$  de la direction des fibres. Des expressions analogues peuvent être obtenues pour les constantes de souplesse.

TABLEAU 11.5. Expression des constantes de rigidité d'un composite unidirectionnel en fonction des angles multiples de l'orientation.

---


$$\begin{aligned}
C'_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\
C'_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta, & C'_{13} &= U_6 + U_7 \cos 2\theta, \\
C'_{16} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta, \\
C'_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, \\
C'_{23} &= U_6 - U_7 \cos 2\theta, \\
C'_{26} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta, \\
C'_{33} &= C_{22}, & C'_{36} &= U_7 \sin 2\theta, \\
C'_{44} &= U_8 + U_9 \cos 2\theta, & C'_{45} &= U_{10} \sin 2\theta, \\
C'_{55} &= U_8 + U_{10} \cos 2\theta, & C'_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8}(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}), \\
U_2 &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}), \\
U_3 &= \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}), \\
U_4 &= \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} + 6C_{12} - 4C_{66}), \\
U_5 &= \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} + 4C_{66}) = \frac{1}{2}(U_1 - U_4), \\
U_6 &= \frac{1}{2}(C_{12} + C_{23}), \\
U_7 &= \frac{1}{2}(C_{12} - C_{23}), \\
U_8 &= \frac{1}{4}(C_{22} - C_{23} + 2C_{66}), \\
U_9 &= \frac{1}{4}(C_{22} - C_{23} - 2C_{66}), \\
U_{10} &= \frac{1}{4}(2C_{66} - C_{22} + C_{23}).
\end{aligned}$$


---

## 11.2 MODULES D'ÉLASTICITÉ

### 11.2.1 Expression des modules hors axes

Les modules d'élasticité sont les constantes pratiques qu'utilise usuellement l'ingénieur pour décrire le comportement mécanique d'un matériau. Ces modules



sont déterminés dans des essais particuliers, et s'expriment aisément en fonction des constantes de souplesse du matériau.

### 11.2.1.1 Essai de traction

#### 1. Traction suivant la direction $x$

Dans le cas d'un essai de traction suivant la direction  $x$ , toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte  $\sigma_{xx}$  :

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= \sigma_{xx} \neq 0, \\ \sigma'_i &= 0, \quad i = 2, \dots, 6.\end{aligned}$$

En introduisant les coefficients de souplesse, les relations d'élasticité (11.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= S'_{11}\sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= S'_{12}\sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{zz} &= S'_{13}\sigma_{xx}, \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{xz} = 0, \\ \gamma_{xy} &= S'_{16}\sigma_{xx}.\end{aligned}\tag{11.6}$$

Le module d'Young  $E_x$  dans la direction  $x$  est défini par :

$$E_x = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{S'_{11}}.\tag{11.7}$$

Soit d'après le tableau 11.2 ou 11.4 :

$$\frac{1}{E_x} = S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta.\tag{11.8}$$

Cette expression peut être réécrite en introduisant les modules d'élasticité (chapitres 9 et 10) du composite unidirectionnel ou orthotrope, mesurés suivant ses axes :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad E_T = \frac{1}{S_{12}}, \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}.$$

D'où :

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_L} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_T} \sin^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta.\tag{11.9}$$

Les déformations  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{zz}$  dans les directions transversales sont reliées à la déformation  $\varepsilon_{xx}$  dans la direction  $x$ , suivant les expressions (11.6) qui conduisent à :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{S'_{12}}{S'_{11}} \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{S'_{13}}{S'_{11}} \varepsilon_{xx}.$$

Ces relations permettent de déterminer les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}$  et  $\nu_{xz}$  définis par :

$$\varepsilon_{yy} = -\nu_{xy}\varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = -\nu_{xz}\varepsilon_{xx}.$$

Soit, donc :

$$\nu_{xy} = -\frac{S'_{12}}{S'_{11}}, \quad \nu_{xz} = -\frac{S'_{13}}{S'_{11}}.$$

D'où les expressions des coefficients de Poisson :

$$\nu_{xy} = E_x \left[ \frac{\nu_{LT}}{E_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right], \quad (11.10)$$

$$\nu_{xz} = E_x \left( \frac{\nu_{LT'}}{E_L} \cos^2 \theta + \frac{\nu_{TT'}}{E_T} \sin^2 \theta \right), \quad (11.11)$$

avec  $\nu_{LT'} = \nu_{LT}$  pour un composite unidirectionnel.

Enfin, les expressions (11.6) montrent que l'essai de traction induit une déformation en cisaillement  $\gamma_{xy}$ . On définit alors un *coefficient de couplage*  $\eta_{xy,x}$ , analogue à un coefficient de Poisson, qui relie la déformation en cisaillement à la déformation  $\varepsilon_{xx}$  suivant la direction  $x$ , par la relation :

$$\gamma_{xy} = -\eta_{xy,x}\varepsilon_{xx}. \quad (11.12)$$

Soit :

$$\eta_{xy,x} = -S'_{16}E_x.$$

D'après les tableaux 11.2 et 11.4, le coefficient de couplage s'exprime finalement suivant :

$$\eta_{xy,x} = E_x \left[ \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2\frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{2}{E_L} \right) \cos^3 \theta \sin \theta + \left( \frac{2}{E_T} + 2\frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \right]. \quad (11.13)$$

## 2. Traction suivant la direction y

On considère parfois l'essai de traction suivant la direction  $y$ . Cet essai n'apporte pas toutefois d'informations nouvelles, puisque cet essai revient à faire tourner les axes précédents d'un angle égal à  $\pi/2$ . Par exemple, le module d'Young  $E_y$ , reliant la contrainte  $\sigma_{yy}$  à la déformation  $\varepsilon_{yy}$ , est obtenu à partir de la relation (11.8), en remplaçant  $\theta$  par  $\theta + \pi/2$ , soit :

$$\frac{1}{E_y} = S'_{22} = \frac{1}{E_L} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cos^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2\frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (11.14)$$

De même, on définit le coefficient de couplage  $\eta_{xy,y}$  liant la déformation en cisaillement  $\gamma_{xy}$  à la déformation  $\varepsilon_{yy}$  par la relation :

$$\gamma_{xy} = -\eta_{xy,y} \varepsilon_{yy} = -\eta_{xy,y} \frac{\sigma_{yy}}{E_y}. \quad (11.15)$$

L'expression de ce coefficient s'écrit :

$$\eta_{xy,y} = E_y \left[ \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{2}{E_L} \right) \sin^3 \theta \cos \theta + \left( \frac{2}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \cos^3 \theta \sin \theta \right]. \quad (11.16)$$

### 11.2.1.2 Essai de cisaillement dans le plan de la couche

Nous examinons le cas d'un essai de cisaillement dans le plan de la couche, correspondant à l'état de contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma'_6 &= \sigma_{xy} \neq 0, \\ \sigma'_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Les relations d'élasticité (11.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= S'_{16} \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= S'_{26} \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{zz} &= S'_{36} \sigma_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{xz} = 0, \\ \gamma_{xy} &= S'_{66} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Le module de cisaillement  $G_{xy}$  dans cet essai est défini par :

$$G_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{1}{S'_{66}}. \quad (11.18)$$

Soit, d'après les tableaux 11.2 et 11.4 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_{xy}} &= 2 \left( \frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + 4 \frac{\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + \frac{1}{G_{LT}} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta). \end{aligned} \quad (11.19)$$

L'essai de cisaillement induit des déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  respectivement suivant les trois directions ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Les deux premières déformations s'expriment par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= -\eta_{xy,x} \frac{\sigma_{xy}}{E_x} = -\eta_{xy,x} \frac{G_{xy}}{E_x} \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= -\eta_{xy,y} \frac{\sigma_{xy}}{E_y} = -\eta_{xy,y} \frac{G_{xy}}{E_y} \gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (11.20)$$

Par analogie aux relations précédentes, la déformation  $\varepsilon_{zz}$  dans la direction  $z$  peut être écrite sous la forme :

$$\varepsilon_{zz} = -\eta_{xy,z} \frac{\sigma_{xy}}{E_T} = -\eta_{xy,z} \frac{G_{xy}}{E_T} \gamma_{xy}.\quad (11.21)$$

Le coefficient de couplage ainsi introduit est donné par l'expression :

$$\eta_{xy,z} = -E_T S'_{36} = 2(v_{TL} - v_{TT'}) \sin \theta \cos \theta.\quad (11.22)$$

### 11.2.1.3 Essai de cisaillement transverse

Les modules d'élasticité, introduits dans les essais précédents hors axes, ne font intervenir que quatre des modules principaux :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  dans le cas d'un composite unidirectionnel et cinq des modules principaux :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  et  $\nu_{LT'}$ , dans le cas d'un composite orthotrope. Nous verrons également (paragraphe 11.3) que les modules  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  suffisent à décrire un comportement à deux dimensions d'une couche composite. La description de problèmes d'élasticité plus généraux nécessite la connaissance des modules d'élasticité relatifs à un essai de cisaillement transverse. Un tel essai est caractérisé par :

$$\begin{cases} \sigma'_5 = \sigma_{xz} \neq 0, \\ \sigma'_i = 0 \text{ si } i = 1, 2, 3, 4, 6, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma'_4 = \sigma_{yz} \neq 0, \\ \sigma'_i = 0 \text{ si } i = 1, 2, 3, 5, 6. \end{cases}\quad (11.23)$$

Les deux essais diffèrent simplement par l'inversion des rôles respectifs des directions  $x$  et  $z$ . Dans le premier cas, les relations d'élasticité (11.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 0, & \varepsilon_{yy} &= 0, & \varepsilon_{zz} &= 0, \\ \gamma_{yz} &= S'_{45} \sigma_{xz}, \\ \gamma_{xz} &= S'_{55} \sigma_{xz}, \\ \gamma_{xy} &= 0.\end{aligned}\quad (11.24)$$

Ces relations montrent que l'état de cisaillement transverse n'induit que des déformations en cisaillement transverse  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ .

Le module de cisaillement  $G_{xz}$  dans cet essai est défini par :

$$G_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\gamma_{xz}} = \frac{1}{S'_{55}}. \quad (11.25)$$

Dans le cas d'un composite orthotrope, nous déduisons l'expression  $G_{xz}$  du tableau 11.4, soit :

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{1}{G_{TT'}} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta. \quad (11.26)$$

Cette relation peut être réécrite dans le cas d'un composite unidirectionnel, en tenant compte de l'expression (9.19) du module de cisaillement transverse en fonction du module d'Young transverse. D'où :

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{2(1+\nu_{TT'})}{E_T} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta. \quad (11.27)$$

L'essai de cisaillement induit également une déformation en cisaillement  $\gamma_{yz}$ . On définit ainsi un coefficient de couplage  $\mu_{xz,yz}$  liant la déformation  $\gamma_{yz}$  à la déformation  $\gamma_{xz}$  par la relation :

$$\gamma_{yz} = \mu_{xz,yz} \gamma_{xz} = \mu_{xz,yz} \frac{\sigma_{xz}}{G_{xz}}. \quad (11.28)$$

L'expression de ce coefficient de couplage est obtenue sans difficulté et s'écrit :

$$\mu_{xz,yz} = G_{xz} S'_{45} = G_{xz} \left( \frac{1}{G_{LT'}} - \frac{1}{G_{TT'}} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (11.29)$$

Dans le cas où les modules de cisaillement longitudinal  $G_{LT'}$  et transversal  $G_{TT'}$  sont voisins, ce coefficient est pratiquement nul et le couplage induit est négligeable. L'expression précédente du coefficient de couplage peut être réécrite dans le cas d'un matériau unidirectionnel suivant :

$$\mu_{xz,yz} = G_{xz} \left( \frac{1}{G_{LT'}} - \frac{2(1+\nu_{TT'})}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (11.30)$$

## 11.2.2 Variations des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel

Pour apprécier au mieux les variations des modules d'élasticité, nous pouvons tracer leurs graphes en fonction de l'orientation  $\theta$  des fibres, pour des composites usuels. Nous considérons les trois cas suivants de composites unidirectionnels.

**1. Composite époxyde-fibres de verre, avec :**

$$\begin{aligned} E_L &= 46 \text{ GPa}, & E_T &= 10 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,31, \\ G_{LT} &= 4,7 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 4 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

**2. Composite époxyde-fibres de carbone, avec :**

$$\begin{aligned} E_L &= 159 \text{ GPa}, & E_T &= 14 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,32, \\ G_{LT} &= 4,8 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 4,3 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (11.32)$$

**3. Composite époxyde-fibres de Kevlar, avec :**

$$\begin{aligned} E_L &= 84 \text{ GPa}, & E_T &= 5,6 \text{ GPa}, & \nu_{LT} &= 0,34, \\ G_{LT} &= 2,1 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= G_{LT} = 2,1 \text{ GPa}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Les variations de  $E_x$ ,  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$  et  $\eta_{xy,x}$  en fonction de l'orientation des fibres sont reportées sur les figures 11.2 à 11.4. Dans le cas des composites à fibres de verre, le module d'Young  $E_x$  décroît d'une manière monotone de la valeur  $E_L$  pour  $\theta = 0^\circ$  à la valeur  $E_T$  pour  $\theta = 90^\circ$ . Le module de cisaillement  $G_{xy}$  passe par un maximum pour  $\theta = 45^\circ$ , et sa variation est symétrique de part et d'autre de cette valeur. Le coefficient de Poisson  $\nu_{xy}$  passe également par un maximum pour une valeur d'angle qui dépend du composite. Le coefficient de couplage  $\eta_{xy,x}$  est nul pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ , et atteint des valeurs élevées pour des valeurs d'angles intermédiaires. Les courbes montrent également que les valeurs extrémales de  $G_{xy}$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\eta_{xy,x}$  sont atteintes pour des orientations différentes des directions principales. Cette propriété est également observée sur le module  $E_x$  (figures 11.3 et 11.4), pour les composites à fibres de carbone et de Kevlar. En effet, en cherchant les valeurs extrémales du module  $E_x$  à partir de l'équation (11.9), on trouve aisément que le module  $E_x$  passe par un maximum supérieur à  $E_L$  pour une valeur de  $\theta$  différente de  $0^\circ$ , si :

$$G_{LT} > \frac{E_L}{2(1+\nu_{LT})}, \quad (11.34)$$

et que le module  $E_x$  passe par un minimum inférieur à  $E_T$  pour une valeur de  $\theta$  différente de  $90^\circ$ , si :

$$G_{LT} < \frac{E_L}{2\left(\frac{E_L}{E_T} + \nu_{LT}\right)}. \quad (11.35)$$

Cette dernière égalité est vérifiée dans le cas du composite époxyde-fibres de carbone (11.32) ainsi que dans le cas du composite époxyde-fibres de Kevlar (11.33).

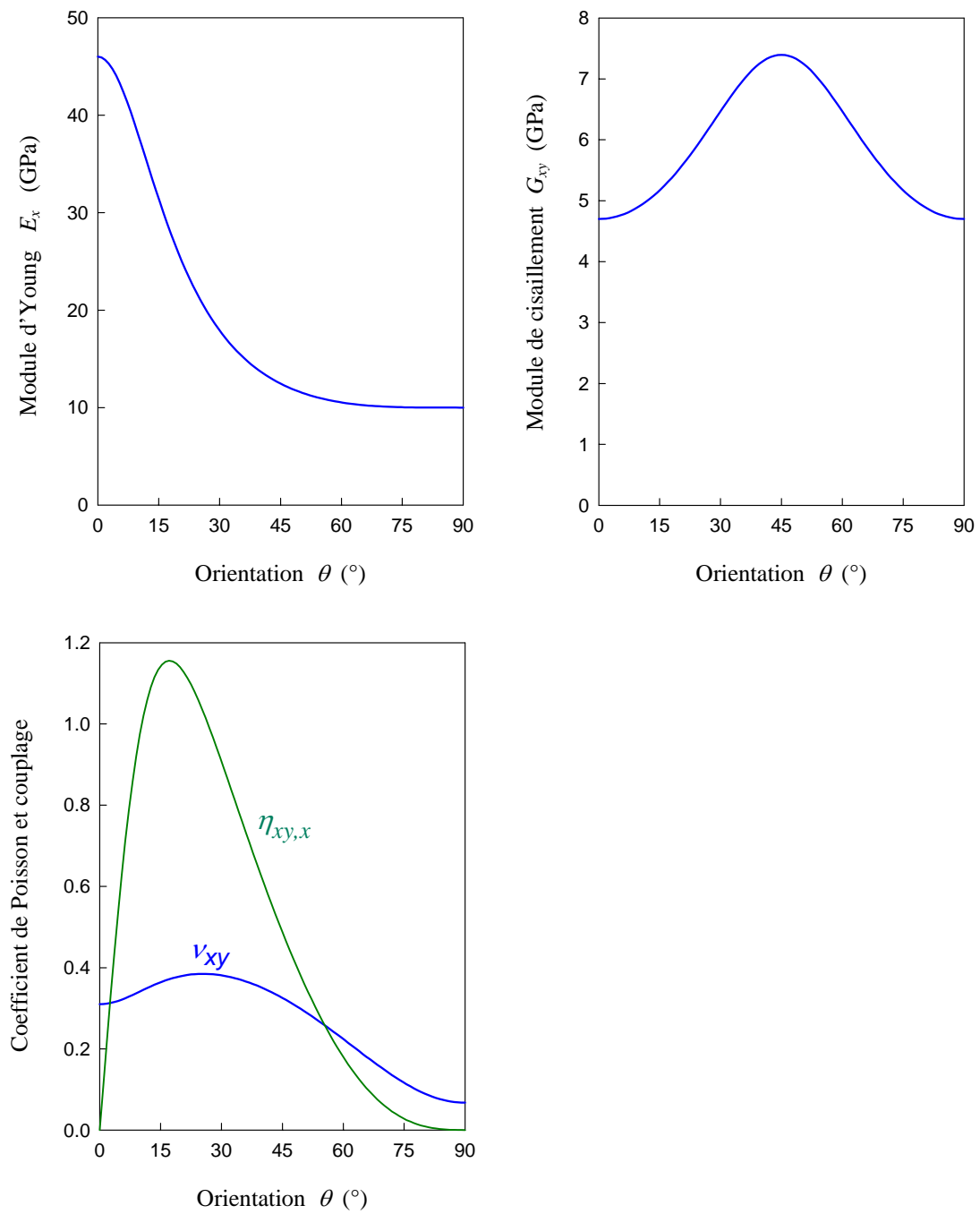


FIGURE 11.2. Variations des modules d'élasticité dans le cas d'un composite époxy-fibres de verre.

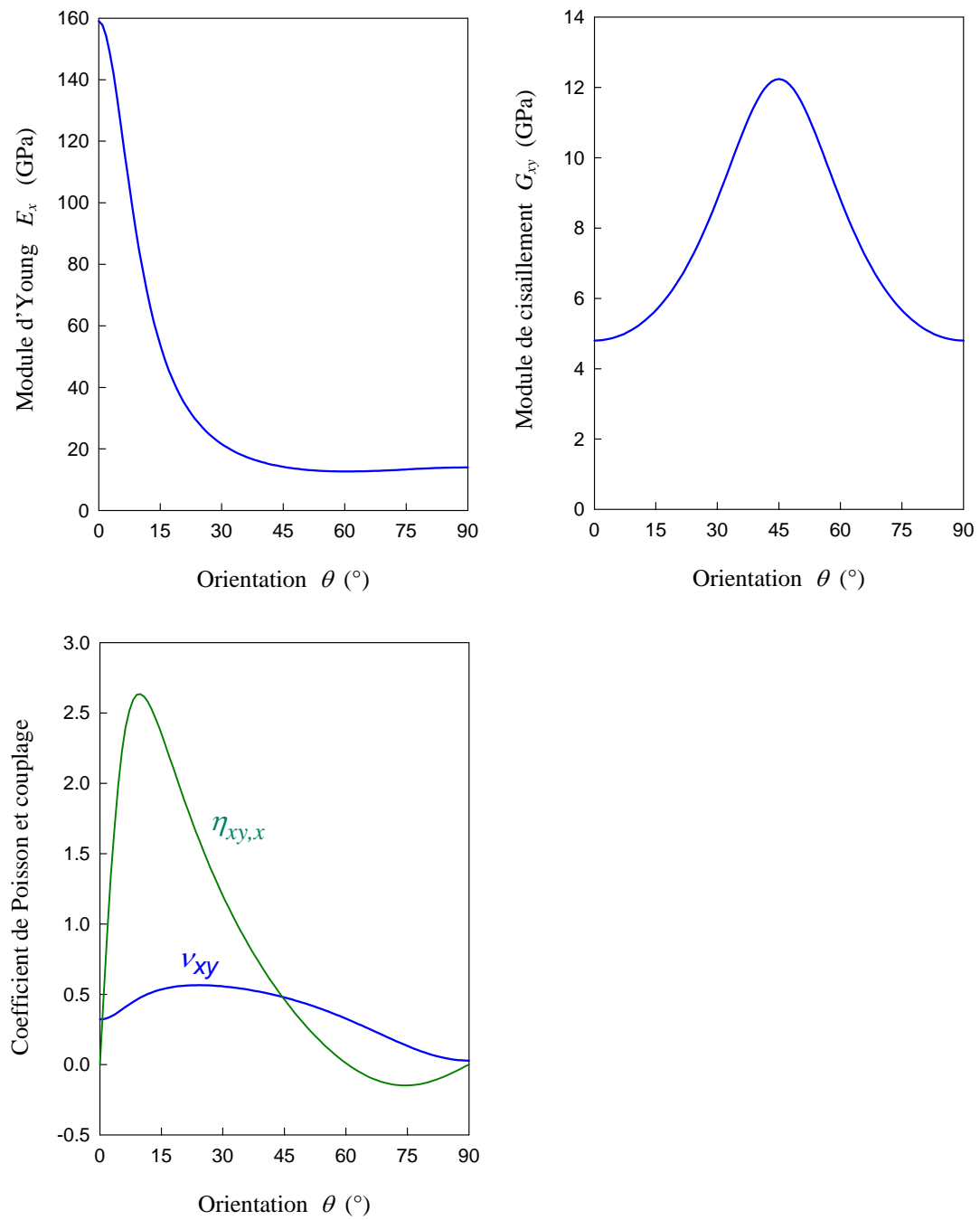


FIGURE 11.3. Variations des modules d'élasticité dans le cas d'un composite époxyde-fibres de carbone.



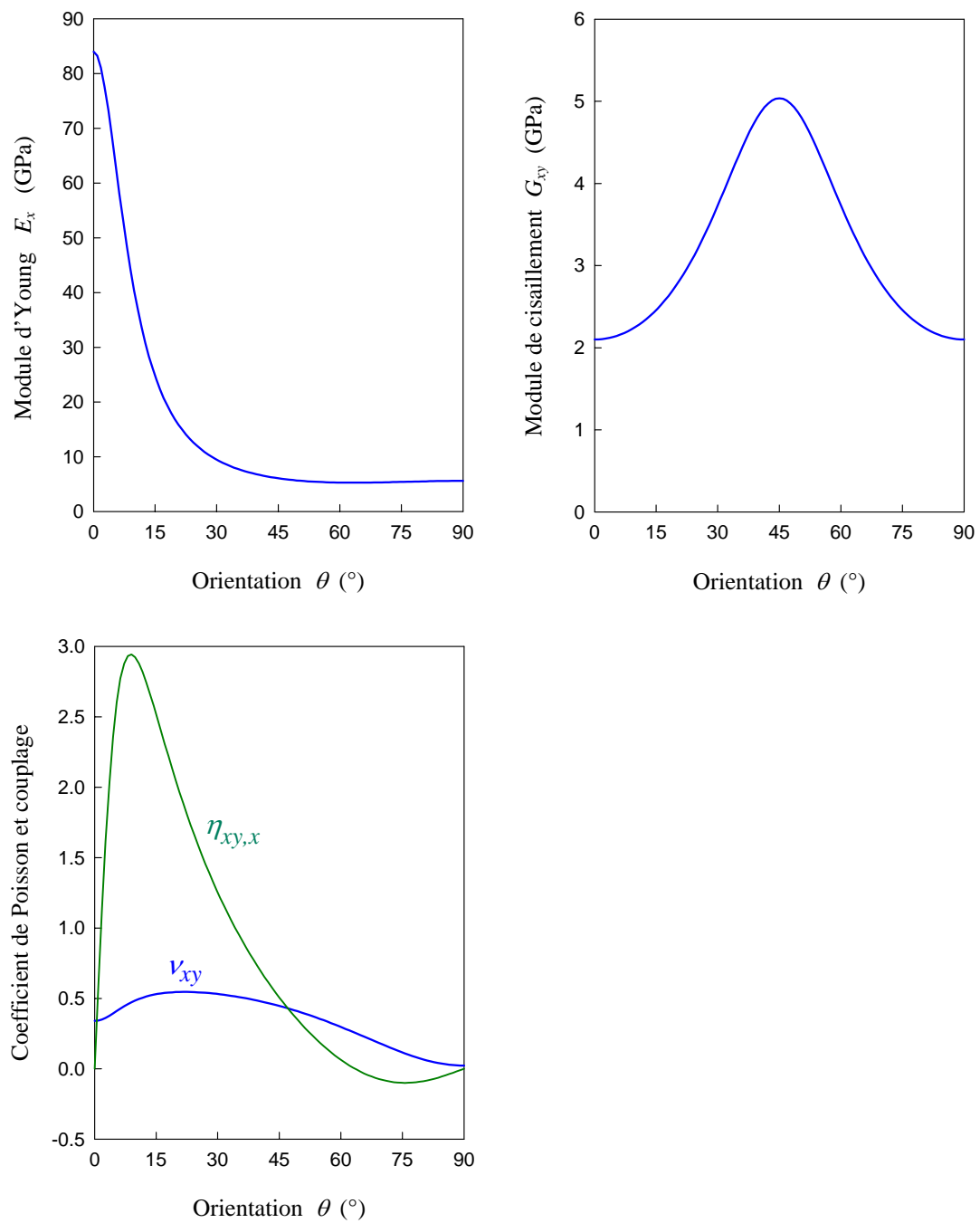


FIGURE 11.4. Variations des modules d'élasticité dans le cas d'un composite époxy-fibres de Kevlar.

## 11.3 ÉTAT DE CONTRAINTES PLANES

### 11.3.1 Introduction

Les éléments développés dans les paragraphes précédents sont applicables à la résolution d'un problème quelconque d'élasticité d'un matériau composite. Dans le cas où le problème d'élasticité peut être ramené à un problème d'élasticité à deux dimensions, les relations établies précédemment dans le cas général se simplifient. Nous étudions dans ce paragraphe le problème d'un état de contraintes à deux dimensions dont les résultats sont nécessaires à l'étude du comportement mécanique des stratifiés (Partie IV).

### 11.3.2 État de contraintes à deux dimensions

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}'(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11.36)$$

en chaque point  $M$  du matériau. La direction  $z$  est la direction principale avec une valeur propre nulle. Usuellement, un tel état de contraintes est dit état de *contraintes planes*. En fait, il serait nécessaire de faire la distinction entre un état de contraintes planes et un état de contraintes à deux dimensions. En effet, dans un sens strict, un état de contraintes planes est un état particulier de contraintes à deux dimensions, pour lequel les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes de la coordonnée  $z$ .

### 11.3.3 Équations d'élasticité pour un état de contraintes planes

Les contraintes en un point  $M$  s'écrivent donc (11.36) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \sigma'_i \neq 0 & \quad \text{si} \quad i = 1, 2, 6, \\ \sigma'_i = 0 & \quad \text{si} \quad i = 3, 4, 5. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Les déformations sont données par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= S'_{11}\sigma'_1 + S'_{12}\sigma'_2 + S'_{16}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_2 &= S'_{12}\sigma'_1 + S'_{22}\sigma'_2 + S'_{26}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_3 &= S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_4 &= 0, \\ \varepsilon'_5 &= 0, \\ \varepsilon'_6 &= S'_{16}\sigma'_1 + S'_{26}\sigma'_2 + S'_{66}\sigma'_6. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_i \neq 0 & \quad \text{si} \quad i = 1, 2, 3, 6, \\ \varepsilon'_i = 0 & \quad \text{si} \quad i = 4, 5. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Il existe donc une déformation suivant la direction  $z$ , donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = \varepsilon'_3 &= S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6 \\ &= S'_{13}\sigma_{xx} + S'_{23}\sigma_{yy} + S'_{36}\sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Les deux premiers termes sont des termes de couplage par effet Poisson, et le troisième est dû à un couplage par cisaillement.

Les relations entre contraintes et déformations exprimées à l'aide des coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 \sigma'_1 &= C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{16}\varepsilon'_6, \\
 \sigma'_2 &= C'_{12}\varepsilon'_1 + C'_{22}\varepsilon'_2 + C'_{23}\varepsilon'_3 + C'_{26}\varepsilon'_6, \\
 0 &= C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{33}\varepsilon'_3 + C'_{36}\varepsilon'_6, \\
 \sigma'_6 &= C'_{16}\varepsilon'_1 + C'_{26}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_3 + C'_{66}\varepsilon'_6.
 \end{aligned} \tag{11.41}$$

Ces relations montrent que les déformations  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon'_2$ ,  $\varepsilon'_3$  et  $\varepsilon'_6$  ne sont pas indépendantes. Nous en tirons :

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_6). \tag{11.42}$$

Cette expression, reportée dans les relations (11.41), permet alors d'exprimer les contraintes  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$  et  $\sigma'_6$  en fonction des déformations  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon'_2$  et  $\varepsilon'_6$ . Par exemple, nous obtenons :

$$\sigma'_1 = \left( C'_{11} - \frac{C'^2_{13}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_1 + \left( C'_{12} - \frac{C'_{13}C'_{23}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_2 + \left( C'_{16} - \frac{C'_{13}C'_{36}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_6$$

et des expressions analogues pour  $\sigma'_2$  et  $\sigma'_6$ . Ces trois relations en  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$  et  $\sigma'_6$  peuvent alors s'exprimer sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}, \tag{11.43}$$

en posant :

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}C'_{j3}}{C'_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6, \tag{11.44}$$

avec

$$Q'_{ji} = Q'_{ij}.$$

Les coefficients  $Q'_{ij}$  sont appelés les *constantes de rigidité réduites* dans un état de contraintes planes. La matrice :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \tag{11.45}$$

est la *matrice de rigidité réduite*.

En conclusion, dans le cas d'un état de contraintes planes, nous avons :

$$\begin{cases} \sigma'_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 6 \\ \sigma'_i = 0 & \text{si } i = 3, 4, 5, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon'_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 3, 6 \\ \varepsilon'_i = 0 & \text{si } i = 4, 5. \end{cases}$$

Les relations d'élasticité s'écrivent sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} \quad (11.46)$$

avec

$$\varepsilon'_3 = S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6,$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}$$

avec

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_6).$$

Les constantes de rigidité réduites s'expriment en fonction des constantes de rigidité suivant les relations :

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}C'_{j3}}{C'_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

$$Q'_{ji} = Q'_{ij}.$$

Les matrices  $[S'_{ij}]$  et  $[Q'_{ij}]$  sont inverses l'une de l'autre.

### 11.3.4 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

Dans les axes principaux d'un composite orthotrope, les constantes de rigidité sont telles que :

$$\begin{aligned} C'_{11} &= C_{11}, & C'_{12} &= C_{12}, & C'_{13} &= C_{13}, \\ C'_{22} &= C_{22}, & C'_{23} &= C_{23}, & C'_{33} &= C_{33}, \\ C'_{66} &= C_{66}, & C'_{16} &= C'_{26} = C'_{36} &= 0. \end{aligned}$$

Compte tenu de ces relations, les expressions (11.44) permettent de trouver les constantes de rigidité réduites exprimées dans les axes principaux, soit :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, & Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, & Q_{16} &= 0, \\ Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, & Q_{26} &= 0, & Q_{66} &= C_{66}, \end{aligned} \quad (11.47)$$

avec en outre pour un composite unidirectionnel :

$$C_{13} = C_{12}, \quad C_{33} = C_{22}.$$

La matrice de rigidité réduite, exprimée dans les axes principaux, s'écrit donc :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (11.48)$$

Rapporté aux axes principaux, un état de contraintes planes est caractérisé par :

$$\begin{cases} \sigma_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 6 \\ \sigma_i = 0 & \text{si } i = 3, 4, 5, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 3, 6 \\ \varepsilon_i = 0 & \text{si } i = 4, 5. \end{cases}$$

Les relations d'élasticité s'écrivent sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (11.49)$$

avec

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2,$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

avec

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2).$$

Les constantes de rigidité réduites sont exprimées par les relations (11.47).

Les matrices  $[S_{ij}]$  et  $[Q_{ij}]$  sont inverses l'une de l'autre.

Les matrices  $[S_{ij}]$  et  $[Q_{ij}]$  étant inverses, nous en déduisons les relations :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}}. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Les relations précédentes permettent d'exprimer les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux (chapitres 9 et 10). Soit :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22}, \\ Q_{66} &= G_{LT}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

### 11.3.5 Relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et dans les axes principaux

Les relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et celles exprimées dans les axes principaux ne font intervenir que les composantes 1, 2 et 6 des contraintes et déformations. La structure des relations générales (9.5) pour un composite unidirectionnel et (10.1) pour un composite orthotrope, des relations d'élasticité (11.43) dans un état de contraintes à deux dimensions, des expressions de changements de base (tableaux 11.1 et 11.3) établies dans le cas général montre que les relations de changement de base exprimant les constantes de rigidité réduites  $Q'_{ij}$  en fonction des constantes  $Q_{ij}$  sont identiques à celles obtenues dans le cas des constantes de rigidité  $C_{ij}$  (tableaux 11.1 et 11.3), en se limitant à  $i, j = 1, 2, 6$ . Enfin, ces éléments associés à la remarque faite au paragraphe 11.1.2 (relation (11.5)) montrent que ces relations sont également identiques pour un composite unidirectionnel ou un composite orthotrope. Les résultats transposés des tableaux (11.1) et (11.3) sont reportés dans le tableau 11.6. De la même manière que dans le cas général (tableau 11.5), il est possible de réécrire les expressions de changement de base en introduisant les angles multiples de l'angle  $\theta$ . Ces expressions sont reportées dans le tableau 11.7.

TABLEAU 11.6. Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel ou orthotrope, en dehors de ses axes principaux (figure 11.1).

---


$$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta),$$

$$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta,$$

$$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$$


---

TABLEAU 11.7. Expression des constantes de rigidité réduites en fonction des angles multiples de l'orientation.

---


$$Q'_{11} = V_1 + V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta,$$

$$Q'_{12} = V_4 - V_3 \cos 4\theta,$$

$$Q'_{16} = \frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta + V_3 \sin 4\theta,$$

$$Q'_{22} = V_1 - V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta,$$

$$Q'_{26} = \frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta - V_3 \sin 4\theta,$$

$$Q'_{66} = V_5 - V_3 \cos 4\theta,$$

avec

$$V_1 = \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}),$$

$$V_2 = \frac{1}{2} (Q_{11} - Q_{22}),$$

$$V_3 = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}),$$

$$V_4 = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}),$$

$$V_5 = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) = \frac{1}{2} (V_1 - V_4).$$


---



### 11.3.6 Conclusions

Tout état de contraintes planes ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ) d'une couche d'un stratifié est caractérisé (11.43) par les constantes de rigidité réduites  $Q'_{ij}$ , rapportées aux axes de référence ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) du stratifié. Ces constantes s'expriment (tableaux 11.6 et 11.7) en fonction des constantes de rigidité réduites  $Q_{ij}$ , rapportées aux axes principaux de la couche considérée. Ces expressions sont identiques pour une couche unidirectionnelle ou une couche orthotrope. Les paramètres  $Q_{ij}$  ( $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{66}$ ) s'expriment eux-mêmes (11.52) en fonction des modules de l'ingénieur  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$  (ou  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ ), mesurés dans les axes principaux (1, 2, 3) = ( $L$ ,  $T$ ,  $T'$ ) de la couche : pour une couche unidirectionnelle,  $L$  est la direction des fibres ; pour une couche orthotrope,  $L$  est la direction chaîne et  $T$  la direction trame.

### 11.3.7 Exemple d'application

Une couche unidirectionnelle est soumise dans l'un de ses plans ( $x$ ,  $y$ ) (figure 11.5) à l'état de déformations suivant :

$$\varepsilon_{xx} = 1 \% = 10^{-2},$$

$$\varepsilon_{yy} = -0,5 \% = -5 \times 10^{-3},$$

$$\gamma_{xy} = 2 \% = 2 \times 10^{-2}.$$

La direction des fibres fait un angle de  $30^\circ$  avec la direction  $x$ . Les constantes élastiques du matériau composite sont :

$$E_L = 40 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,32, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}.$$

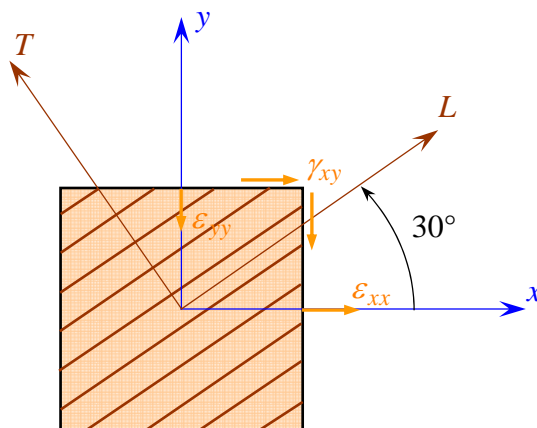


FIGURE 11.5. Exemple d'application.

En considérant que la couche est dans un état de contraintes planes, déterminer :

1. les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes  $(x, y)$  ;
2. les contraintes dans les axes principaux  $(L, T)$  de la couche.

### 1. Détermination des contraintes $\sigma_{xx}$ , $\sigma_{yy}$ et $\sigma_{xy}$

Il faut déterminer au préalable la matrice de rigidité réduite rapportée aux axes principaux :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = 41,051 \text{ GPa},$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = 10,263 \text{ GPa},$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = 3,284 \text{ GPa},$$

$$Q_{66} = G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}.$$

D'où la matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 41,051 & 3,284 & 0 \\ 3,284 & 10,263 & 0 \\ 0 & 0 & 4,5 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

La matrice de rigidité réduite, rapportée aux axes  $(x, y)$ , est ensuite calculée à partir des expressions du tableau 11.6 :

$$Q'_{11} = 41,051 \times \frac{9}{16} + 10,263 \times \frac{1}{16} + 2(3,284 + 2 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} = 28,339 \text{ GPa},$$

$$Q'_{12} = (41,051 + 10,263 - 4 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} + 3,284 \times \left( \frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right) = 8,299 \text{ GPa},$$

$$Q'_{16} = (41,051 - 3,284 - 2 \times 4,5) \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{3}}{8} + (3,284 - 10,263 + 2 \times 4,5) \frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = 9,561 \text{ GPa},$$

$$Q'_{22} = 41,051 \times \frac{1}{16} + 10,263 \times \frac{9}{16} + 2(3,284 + 2 \times 4,5) \frac{3}{4} \frac{1}{4} = 12,945 \text{ GPa},$$

$$Q'_{26} = (41,051 - 3,284 - 2 \times 4,5) \frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} + (3,284 - 10,263 + 2 \times 4,5) \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{1}{2} \\ = 3,770 \text{ GPa},$$

$$Q'_{66} = \left[ 41,051 + 10,263 - 2(3,284 + 4,5) \right] \frac{1}{4} \frac{3}{4} + 4,5 \left( \frac{9}{16} + \frac{1}{16} \right) \\ = 9,515 \text{ GPa}.$$

D'où la matrice de rigidité réduite dans les axes  $(x, y)$  :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} 28,339 & 8,299 & 9,561 \\ 8,299 & 12,945 & 3,770 \\ 9,561 & 3,770 & 9,515 \end{bmatrix} \text{ GPa.}$$

Les contraintes dans les axes  $(x, y)$  sont ensuite calculées à partir de (11.43) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,339 & 8,299 & 9,561 \\ 8,299 & 12,945 & 3,770 \\ 9,561 & 3,770 & 9,515 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Soit :

$$\sigma_{xx} = 433 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{yy} = 94 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{xy} = 267 \text{ MPa.}$$

## 2. Détermination des contraintes dans les axes principaux

Les contraintes dans les axes principaux s'obtiennent à partir de la relation générale (5.44). Dans le cas de contraintes planes, cette relation est limitée aux trois contraintes dans le plan et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (11.53)$$

où  $\theta$  est l'angle de la direction des fibres avec la direction  $x$  de référence. Dans le cas présent, cette expression s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 433 \\ 94 \\ 267 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Soit :

$$\sigma_L = 580 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_T = -53 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{LT} = -13,5 \text{ MPa.}$$

Ces résultats sont schématisés sur la figure 11.6.

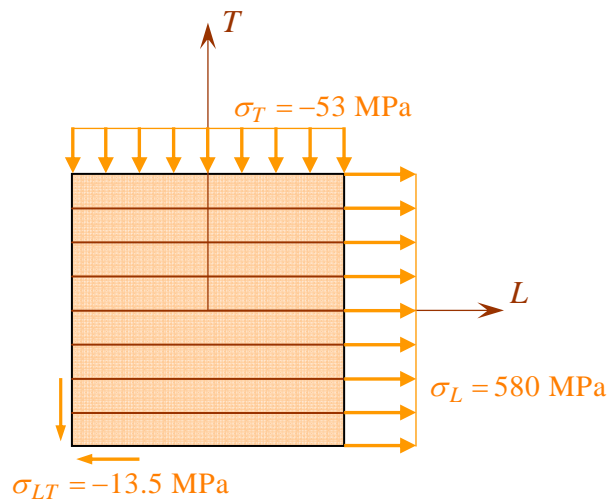


FIGURE 11.6. Contraintes dans les axes principaux.

## 11.4 DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES MODULES

### 11.4.1 Introduction

Le comportement élastique d'un matériau composite est déterminé entièrement par la connaissance de cinq coefficients dans le cas d'un composite unidirectionnel, et de neuf coefficients dans le cas d'un composite orthotrope. Dans le cas d'un état de contraintes planes, seuls quatre coefficients sont nécessaires :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ , que les matériaux soient unidirectionnels ou orthotropes. Ces modules peuvent être mesurés dans des essais particuliers.

### 11.4.2 Traction longitudinale

Dans un essai de traction longitudinale, une charge  $F_1$  est exercée suivant la direction des fibres (composite unidirectionnel) ou suivant la direction chaîne (composite tissu) sur la section droite  $S_1$  du matériau (figure 11.7). La contrainte  $\sigma_{11}$  est donnée par :

$$\sigma_{11} = \frac{F_1}{S_1}. \quad (11.54)$$

La détermination expérimentale de l'essai consiste à mesurer dans la partie utile de l'éprouvette :

- la charge  $F_1$ ,
- l'allongement  $\Delta l_1$  suivant la longueur  $l_1$ ,
- la variation  $\Delta l_2$  de la dimension transverse  $l_2$ .

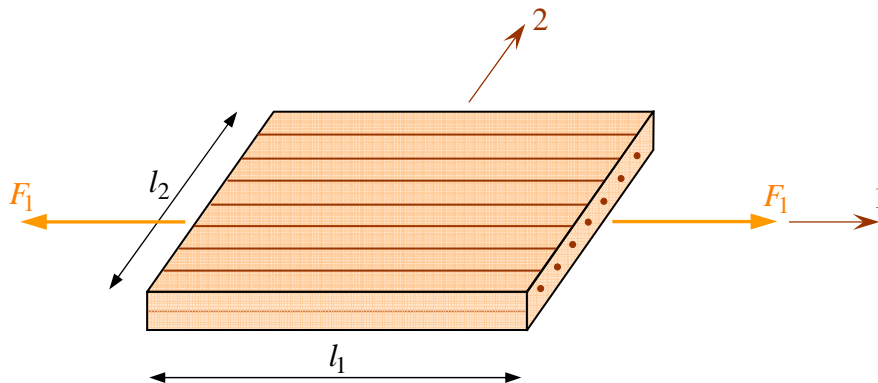


FIGURE 11.7. Traction longitudinale.

Les déformations longitudinale et transverse sont données respectivement par :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l_1}{l_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta l_2}{l_2}. \quad (11.55)$$

Le module longitudinal  $E_L$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  sont ensuite calculés à partir des expressions :

$$E_L = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{et} \quad \nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}. \quad (11.56)$$

### 11.4.3 Traction transverse

Dans un essai de traction transverse, une charge  $F_2$  est exercée suivant la direction transverse aux fibres ou suivant le sens trame (figure 11.8). La contrainte  $\sigma_{22}$  est alors donnée par :

$$\sigma_{22} = \frac{F_2}{S_2}, \quad (11.57)$$

où  $S_2$  est l'aire de la section droite sur laquelle est exercée la charge  $F_2$ . Comme dans l'essai de traction longitudinale, les déformations  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  sont mesurées dans la partie utile de l'éprouvette. Le module transverse  $E_T$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{TL}$  sont ensuite calculés par les relations :

$$E_T = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} \quad \text{et} \quad \nu_{TL} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}. \quad (11.58)$$

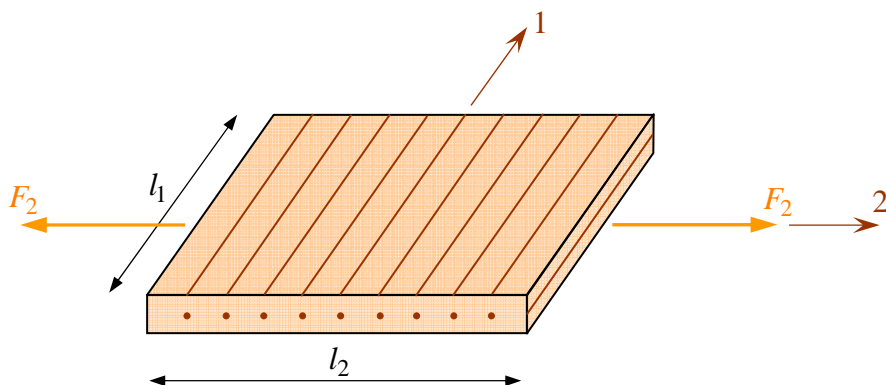


FIGURE 11.8. Traction transverse.

À ce stade, les modules mesurés doivent satisfaire, aux erreurs de mesure près, la relation (10.16). Si cette relation n'est pas vérifiée, deux raisons peuvent être invoquées :

1. les valeurs n'ont pas été mesurées correctement ;
2. le matériau ne peut être décrit par une relation contrainte-déformation linéaire.

#### 11.4.4 Traction hors axes

Un essai usuellement utilisé pour mesurer le module de cisaillement longitudinal  $G_{LT}$  est un essai de traction effectué à  $45^\circ$  de la direction des fibres ou de la chaîne (figure 11.9). La charge  $F$ , exercée sur l'éprouvette, est appliquée dans la

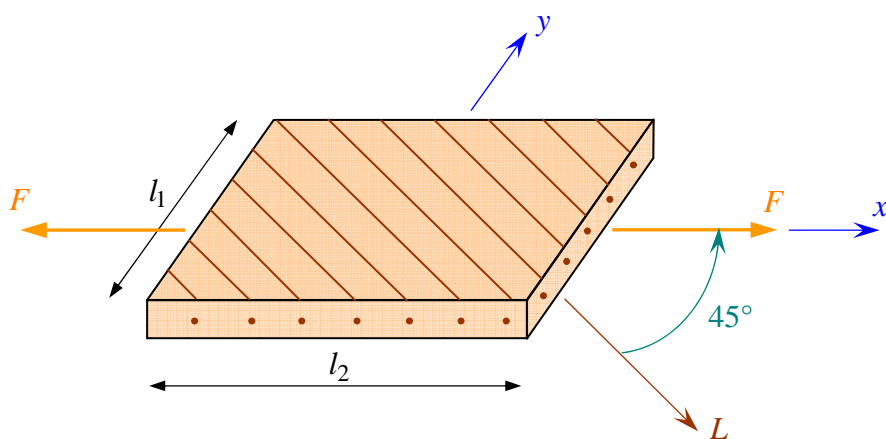


FIGURE 11.9. Traction hors axes.

direction  $x$  sur la section  $S$  créant une contrainte :

$$\sigma_{45} = \frac{F}{S}. \quad (11.59)$$

La mesure de l'allongement  $\varepsilon_{45}$  dans cette même direction permet d'en déduire le module d'Young mesuré dans la direction à  $45^\circ$  par :

$$E_{45} = \frac{\sigma_{45}}{\varepsilon_{45}}. \quad (11.60)$$

D'après la relation (11.9), ce module s'exprime par :

$$\frac{1}{E_{45}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right), \quad (11.61)$$

où seul le module de cisaillement  $G_{LT}$  n'est pas connu. Ce module est donc déduit de la relation :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} + 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L}. \quad (11.62)$$

### 11.4.5 Réalisations pratiques des essais de traction

Dans la pratique, les essais de traction sont effectués en utilisant soit des éprouvettes en forme d'haltères, soit des éprouvettes droites avec des talons (figure 11.10). La charge est généralement appliquée sur les têtes de l'éprouvette par l'intermédiaire de mâchoires auto-serrantes, de manière à assurer une répartition homogène des contraintes dans la partie utile de l'éprouvette. L'éprouvette en forme d'haltères conduit généralement à des amorces de fissures au voisinage de l'épaulement de l'éprouvette, conduisant à des erreurs sur l'estimation des caractéristiques à la rupture du matériau. La charge appliquée est habituellement mesurée à l'aide d'une cellule de charge adaptée à la machine d'essai. Les déformations peuvent être mesurées soit à l'aide d'extensomètres, soit à l'aide de jauges d'extensométrie. Les extensomètres fixés mécaniquement à l'éprouvette sont faciles d'emploi. Il est nécessaire de veiller toutefois à l'absence de glissement lors de leurs utilisations. Les jauges d'extensométrie, de mise en œuvre plus délicate, sont utilisées pour des mesures plus précises des déformations. Il est nécessaire également de bien veiller à ce que, lors d'un essai de traction longitudinale, la direction de la charge appliquée coïncide réellement avec la direction des fibres ou de la chaîne. Un désalignement, même faible, peut entraîner, dans le cas d'un composite unidirectionnel, des valeurs mesurées nettement plus faibles que les valeurs réelles du module d'Young longitudinal (relation (11.9)). Ce problème n'est pas aussi critique dans le cas d'un essai de traction transverse.

L'application de la charge à l'aide de mâchoires auto-serrantes impose au niveau des têtes de l'éprouvette une déformation de traction  $\varepsilon_{xx}$  suivant la direction

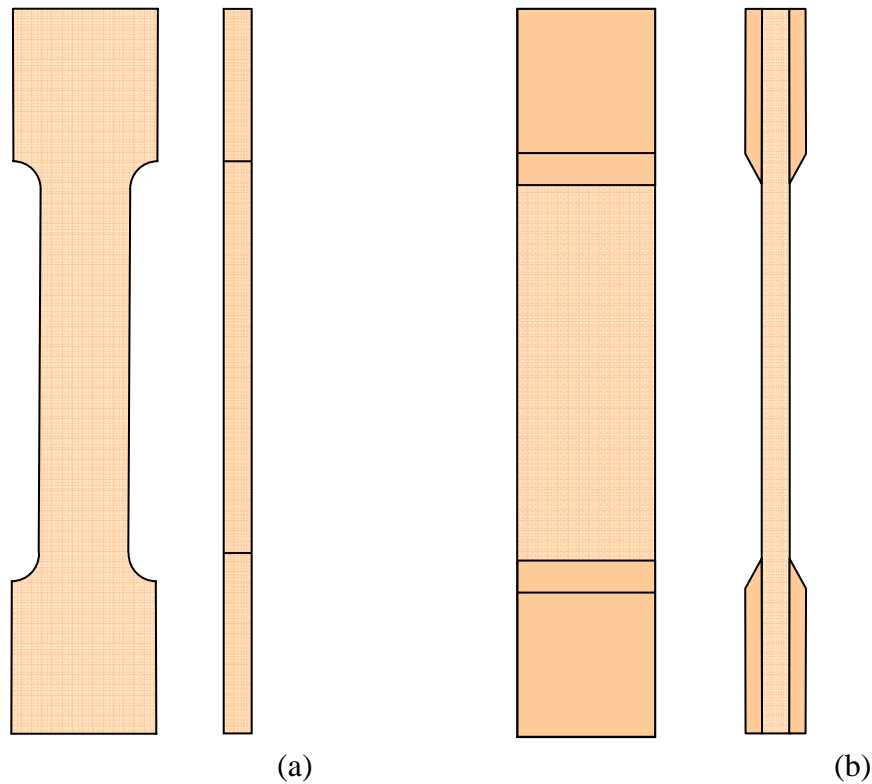


FIGURE 11.10. Éprouvettes de traction : a) en forme d'haltères ; b) droite avec talons.

direction longitudinale  $x$  de l'éprouvette. Ce dispositif impose également des déformations transversales et en cisaillement nulles ( $\varepsilon_{yy} = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ ). L'état de déformation réel au niveau des mâchoires diffère donc d'un état de traction (11.6). Toutefois, conformément au principe de Saint-Venant, l'état des déformations et des contraintes est bien celui d'un état de traction assez loin des têtes de l'éprouvette. Par ailleurs, dans le cas d'essais de traction hors axes, il s'ajoute un couplage important en cisaillement, résultant des termes 16 de la matrice de souplesse. Ce couplage induit une déformée en  $S$  de l'éprouvette. De manière à se placer dans de bonnes conditions de mesures, les essais doivent être effectués sur des éprouvettes ayant une longueur assez grande comparée à la largeur, et en limitant les mesures à la partie centrale des éprouvettes.

## EXERCICES

**11.1** Tracer (en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires) les modules d'élasticité  $E_x$ ,  $G_{xy}$ ,  $\eta_{xy,x}$  et  $\nu_{xy}$  en fonction de l'orientation  $\theta$  dans le cas :

— d'un composite unidirectionnel :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, \quad E_T = 10 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,31, \quad G_{LT} = 4,5 \text{ GPa};$$



— d'un composite orthotrope :

$$E_L = E_T = 25 \text{ GPa}, \quad \nu_{LT} = 0,12, \quad G_{LT} = 4 \text{ GPa} .$$

**11.2** En s'aidant des résultats établis dans les exercices 5.3 et 6.2, trouver directement les relations entre la matrice de rigidité réduite exprimée dans une direction  $\theta$  et la matrice de rigidité réduite dans les axes principaux d'un matériau orthotrope.

**11.3** Calculer les constantes de rigidité réduites, dans les axes principaux, des composites considérés dans l'exercice 11.1.

Calculer ensuite les constantes de rigidité réduites dans une direction de  $30^\circ$  par rapport aux axes principaux.

**11.4** Établir une procédure numérique ayant :

- pour entrées : les modules  $E_L, E_T, \nu_{LT}, G_{LT}$  et l'orientation  $\theta$  de la couche ;
- pour sorties : les constantes de rigidité réduite  $Q_{ij}$  dans les axes et  $Q'_{ij}$  dans la direction  $\theta$ .

Appliquer cette procédure pour établir les résultats trouvés dans l'exercice 11.3.

**11.5** À la suite de la procédure précédente, établir une procédure de calcul numérique ayant :

- pour entrées : l'état de déformation ( $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$ ) en un point d'une couche ;
- pour sorties : les contraintes ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ ) dans les axes géométriques et les contraintes ( $\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$ ) dans les axes principaux.

Appliquer cette procédure dans le cas des couches considérées dans l'exercice 11.3 et pour l'état de déformation :

$$\varepsilon_{xx} = 1,5 \%, \quad \varepsilon_{yy} = 1 \%, \quad \gamma_{xy} = 2 \% .$$