

# Comportement Élastique d'un Matériau Composite Orthotrope

## 10.1 LOI DE HOOKE POUR UN COMPOSITE ORTHOTROPE

### 10.1.1 Composite orthotrope

Les stratifiés sont constitués de couches de matériaux composites unidirectionnels ou de composites à base de tissus. Généralement, les tissus (Chapitre 2) sont constitués de fils unidirectionnels croisés à  $90^\circ$  : les uns dans le sens chaîne, les autres dans le sens trame. Ces couches possèdent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, et se comportent d'un point de vue élastique comme un matériau orthotrope. Les directions principales (1, 2) seront prises respectivement suivant la direction chaîne et la direction trame ; ces directions seront également notées  $L$  et  $T$  (figure 10.1). La direction 3 orthogonale au plan de la couche sera également notée  $T'$ .

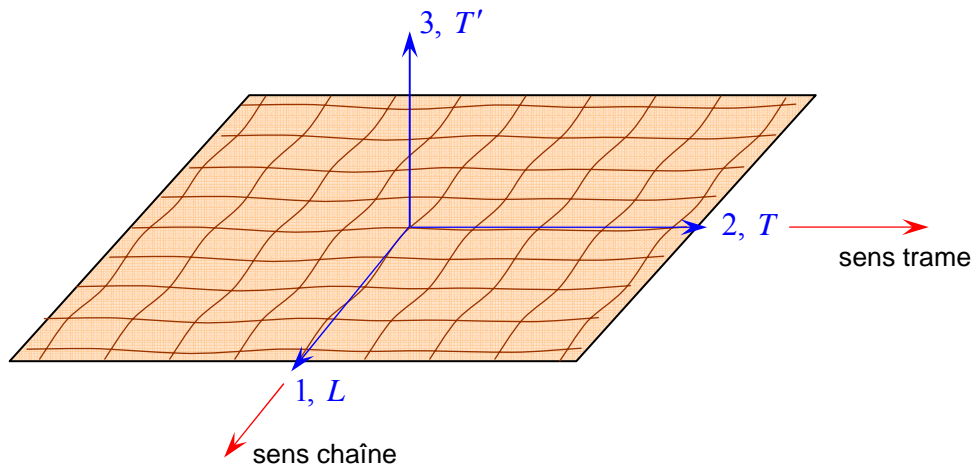


FIGURE 10.1. Couche de matériau composite orthotrope.

### 10.1.2 Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est décrit en introduisant soit les constantes de rigidité  $C_{ij}$ , soit les constantes de souplesse  $S_{ij}$ . Compte tenu des résultats établis au Chapitre 7 (relation 7.14), la loi de Hooke s'écrit suivant l'une des formes matricielles :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (10.1)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (10.2)$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est donc caractérisé par 9 coefficients indépendants :

$$C_{11}, \quad C_{12}, \quad C_{13}, \quad C_{22}, \quad C_{23}, \quad C_{33}, \quad C_{44}, \quad C_{55}, \quad C_{66},$$

ou

$$S_{11}, \quad S_{12}, \quad S_{13}, \quad S_{22}, \quad S_{23}, \quad S_{33}, \quad S_{44}, \quad S_{55}, \quad S_{66}.$$

Les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}, & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S}, \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S}, & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S}, \\ C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S}, & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S}, \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

avec

$$\Delta S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}.$$

Les relations inverses donnant les coefficients de souplesse en fonction des coefficients de rigidité sont obtenues en intervertissant les rôles de  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$ .

Le composite unidirectionnel est un cas particulier de matériau orthotrope dit *orthotrope de révolution*, pour lequel :

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{12}, & C_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), \\ C_{33} &= C_{22}, & C_{55} &= C_{66}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

et

$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{12}, & S_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}), \\ S_{33} &= S_{22}, & S_{55} &= S_{66}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

## 10.2 MODULES DE L'INGÉNIEUR

Les modules usuels de l'ingénieur (module d'Young, coefficients de Poisson, modules de cisaillement) s'expriment simplement en fonction des coefficients de souplesse.

### 10.2.1 Traction dans le sens chaîne

Dans un essai de traction suivant le sens chaîne, toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte  $\sigma_1$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i = 2, 3, \dots, 6. \end{aligned} \quad (10.6)$$

En fonction des constantes de souplesse, les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, \\ \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1, \\ \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Soit :

$$\sigma_1 = \frac{1}{S_{11}}\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{S_{12}}{S_{11}}\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{13}}{S_{11}}\varepsilon_1. \quad (10.8)$$

Nous en déduisons le module d'Young et les coefficients de Poisson, mesurés dans un essai de traction suivant le sens chaîne :

$$\begin{aligned} E_{\text{ch}} = E_L = E_1 &= \frac{1}{S_{11}}, \\ \nu_{LT} = \nu_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad \nu_{LT'} = \nu_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{11}}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

### 10.2.2 Traction dans le sens trame

Dans un essai de traction suivant le sens trame, seule la contrainte  $\sigma_2$  n'est pas nulle :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i \neq 2.\end{aligned}\quad (10.10)$$

Les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2, \\ \varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2, \\ \varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}\quad (10.11)$$

Soit :

$$\sigma_2 = \frac{1}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{23}}{S_{22}}\varepsilon_2.\quad (10.12)$$

D'où le module d'Young et les coefficients de Poisson, mesurés dans un essai de traction suivant le sens trame :

$$\begin{aligned}E_{\text{tr}} = E_T = E_2 &= \frac{1}{S_{22}}, \\ \nu_{TL} = \nu_{21} &= -\frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad \nu_{TT'} = \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}.\end{aligned}\quad (10.13)$$

### 10.2.3 Traction transversale

Nous appellerons traction transversale une traction effectuée dans une direction normale au plan de la couche :

$$\begin{aligned}\sigma_3 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i \neq 3.\end{aligned}\quad (10.14)$$

Nous obtenons aisément le module d'Young transversal et les coefficients de Poisson correspondants :

$$\begin{aligned}E_{T'} = E_3 &= \frac{1}{S_{33}}, \\ \nu_{T'L} = \nu_{31} &= -\frac{S_{13}}{S_{33}}, \quad \nu_{T'T} = \nu_{32} = -\frac{S_{23}}{S_{33}}.\end{aligned}\quad (10.15)$$

### 10.2.4 Relation entre modules d'Young et coefficients de Poisson

La comparaison des diverses relations établies (10.9), (10.13) et (10.15) permet d'écrire :

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}, \quad \frac{E_L}{\nu_{LT'}} = \frac{E_T}{\nu_{T'L}}, \quad \frac{E_T}{\nu_{TT'}} = \frac{E_{T'}}{\nu_{T'T}}, \quad (10.16)$$

relations qui s'écrivent sous la forme condensée :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ ou } L, T, T'. \quad (10.17)$$

### 10.2.5 Essais de cisaillement

Un essai de cisaillement dans le plan de la couche correspond à un état des contraintes tel que :

$$\begin{aligned} \sigma_6 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0 \quad \text{si } i \neq 6. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 &= 0, \\ \sigma_6 &= C_{66}\varepsilon_6. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Nous en déduisons le module de cisaillement dans le plan de la couche :

$$G_{12} = G_{LT} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}}. \quad (10.20)$$

De même, nous trouvons les modules de cisaillement dans des essais transversaux :

— suivant le sens chaîne :

$$G_{13} = G_{LT'} = C_{55} = \frac{1}{S_{55}}, \quad (10.21)$$

— suivant le sens trame :

$$G_{23} = G_{TT'} = C_{44} = \frac{1}{S_{44}}. \quad (10.22)$$

## 10.2.6 Conclusion

La relation d'élasticité (10.2) s'écrit, en introduisant les modules de l'ingénieur, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (10.23)$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope peut être décrit par les 9 modules indépendants :

- 3 modules d'Young :  $E_1, E_2, E_3$  ou  $E_L, E_T, E_{T'}$ ,
- 3 coefficients de Poisson :  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  ou  $\nu_{LT}, \nu_{LT'}, \nu_{TT'}$ , (10.24)
- 3 modules de cisaillements :  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  ou  $G_{LT}, G_{LT'}, G_{TT'}$ .

Les 3 autres coefficients de Poisson sont déterminés à l'aide de la relation (10.17).

## 10.3 CONSTANTES DE RIGIDITÉ ET DE SOUPLESSE EN FONCTION DES MODULES DE L'INGÉNIEUR

### 10.3.1 Constantes de souplesse

Les expressions des constantes de souplesse s'obtiennent sans difficulté à partir des expressions établies au paragraphe précédent, soit :

$$\begin{array}{lll} S_{11} = \frac{1}{E_1}, & S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \\ S_{22} = \frac{1}{E_2}, & S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, & S_{33} = \frac{1}{E_3}, \\ S_{44} = \frac{1}{G_{23}}, & S_{55} = \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \end{array} \quad (10.25)$$

### 10.3.2 Constantes de rigidité

Les expressions des constantes de rigidité en fonction des modules de l'ingénieur s'obtiennent à partir des relations (10.3) et (10.25), soit :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, \\
 C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \\
 C_{13} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\
 C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12},
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

avec

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}.$$

### 10.3.3 Restriction sur les coefficients d'élasticité

Si une seule contrainte suivant un axe principal est appliquée au matériau, la déformation suivant cette direction est de même signe que la contrainte. Il en résulte que :

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0, \tag{10.27}$$

ou en terme de modules d'ingénieur :

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12} > 0. \tag{10.28}$$

De même, si l'on impose au matériau une seule déformation suivant un axe principal, la contrainte qui en résulte dans cette direction a le même signe que la déformation imposée. Il en résulte que :

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0, \tag{10.29}$$

et compte tenu de (10.26) :

$$1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0, \quad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0, \quad 1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0, \tag{10.30}$$

et

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0, \tag{10.31}$$

puisque la matrice  $S$  est définie positivement (déterminant positif), le travail thermodynamique étant positif. Cette même propriété associée aux relations

(10.26) implique également :

$$\begin{aligned} |S_{23}| &< \sqrt{S_{22}S_{33}}, \\ |S_{13}| &< \sqrt{S_{11}S_{33}}, \\ |S_{12}| &< \sqrt{S_{11}S_{22}}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

En utilisant les relations de symétrie (10.17), les conditions (10.30) peuvent également s'écrire :

$$\begin{aligned} |v_{21}| &< \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}, & |v_{12}| &< \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \\ |v_{32}| &< \sqrt{\frac{E_3}{E_2}}, & |v_{23}| &< \sqrt{\frac{E_2}{E_3}}, \\ |v_{13}| &< \sqrt{\frac{E_1}{E_3}}, & |v_{31}| &< \sqrt{\frac{E_3}{E_1}}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

De même en reportant les relations de symétrie dans la condition (10.31), nous obtenons :

$$2v_{21}v_{32}v_{13} < 1 - v_{21}^2 \frac{E_1}{E_2} - v_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} < 1. \quad (10.34)$$

Les deux dernières conditions peuvent être regroupées pour obtenir :

$$\left(1 - v_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right) \left(1 - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right) - \left(v_{21} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + v_{32}v_{13} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right)^2 > 0. \quad (10.35)$$

Enfin, la condition précédente peut être réarrangée de manière à obtenir des bornes sur le coefficient de Poisson  $v_{21}$  :

$$\begin{aligned} - \left[ v_{32}v_{13} \frac{E_2}{E_1} + \left(1 - v_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right] \\ < v_{21} < \\ - \left[ v_{32}v_{13} \frac{E_2}{E_1} - \left(1 - v_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right]. \end{aligned} \quad (10.36)$$

## EXERCICES

**10.1** Calculer les constantes de rigidité et de souplesse d'un composite orthotrope de caractéristiques :



$$\begin{aligned} E_L &= 30 \text{ GPa}, & E_T &= 20 \text{ GPa}, & E_{T'} &= 10 \text{ GPa}, \\ \nu_{LT} &= 0,14, & \nu_{LT'} &= 0,30, & \nu_{TT'} &= 0,32, \\ G_{LT} &= 4 \text{ GPa}, & G_{LT'} &= 3,5 \text{ GPa}, & G_{TT'} &= 2,5 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

**10.2** Calculer les constantes de rigidité et de souplesse d'un composite orthotrope de caractéristiques :

$$\begin{aligned} E_L &= E_T = 25 \text{ GPa}, & E_{T'} &= 10 \text{ GPa}, \\ \nu_{LT} &= 0,12, & \nu_{LT'} &= 0,30, & \nu_{TT'} &= 0,32, \\ G_{LT} &= 4,2 \text{ GPa}, & G_{LT'} &= G_{TT'} = 3,5 \text{ GPa}. \end{aligned}$$