

Partie III

Comportement Mécanique des Matériaux Composites

Cette partie développe l'analyse du comportement mécanique des matériaux composites à l'échelle des constituants (matrice et fibres). Le chapitre 9 considère le comportement élastique d'un composite unidirectionnel: loi d'élasticité, estimation des modules du composite et comparaison des résultats déduits des modèles avec les résultats expérimentaux. Les matériaux composites à renfort tissu sont des matériaux orthotropes dont le comportement élastique est étudié au chapitre 10. Les matériaux composites stratifiés sont constitués de couches successives dont les directions varient d'une couche à l'autre. Ainsi, le chapitre 11 analyse le comportement élastique d'un matériau unidirectionnel ou orthotrope en dehors des directions du matériau. Une attention particulière est apportée sur l'état de contraintes planes qui sera considéré dans la théorie des stratifiés (partie IV). Enfin, le chapitre 12 introduit les mécanismes fondamentaux de rupture induits dans les matériaux composites, et le chapitre développe différents critères pour évaluer la résistance à la rupture des stratifiés.

Comportement Élastique d'un Matériau Composite Unidirectionnel

9.1 MODULES EFFECTIFS

9.1.1 Concept d'homogénéisation

À une échelle suffisamment fine, tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux dits homogènes. Pour s'en convaincre, il suffit de partir de l'échelle des atomes et des molécules. Si les matériaux usuels de l'ingénieur devaient être caractérisés à cette échelle d'observation, la tâche serait insurmontable. Pour contourner cette difficulté, l'ingénieur introduit l'hypothèse de continuité de la matière. Cette hypothèse implique un concept de moyenne statistique, dans lequel la constitution réelle du matériau est idéalisée en considérant le matériau comme étant continu. Une fois le modèle de continuité admis, le concept d'homogénéité s'en déduit. Un milieu homogène est alors caractérisé par des propriétés identiques en chaque point.

Au niveau de l'ingénieur, le caractère d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés physiques ou mécaniques du matériau sont des fonctions du point. Les variations des propriétés peuvent être de deux types : soit continues, soit discontinues comme dans le cas des matériaux composites. Dans ce cas, les propriétés ponctuelles du matériau varient d'une manière discontinue aux interfaces de passage entre les diverses phases. Chaque phase est supposée être homogène et isotrope.

Dans le cas d'une phase 1 dispersée dans une phase 2 (figure 9.1), il existe généralement une dimension caractéristique de l'hétérogénéité. Par exemple, dans le cas d'un matériau composite à fibres, cette dimension sera la distance moyenne entre les fibres. Cette dimension est en fait une description idéalisée d'une répartition statistique au sein du matériau hétérogène réel. D'autre part, il existe généralement une échelle de dimension δ à laquelle les propriétés du matériau peuvent être moyennées avec une bonne approximation. Ceci signifie que, dans ce cas, les propriétés mesurées sur un échantillon de dimension δ sont indépendantes de l'endroit ("du point ") du matériau où a été prélevé l'échantillon. Dans le cadre d'un tel concept, le matériau peut alors être considéré comme étant effectivement

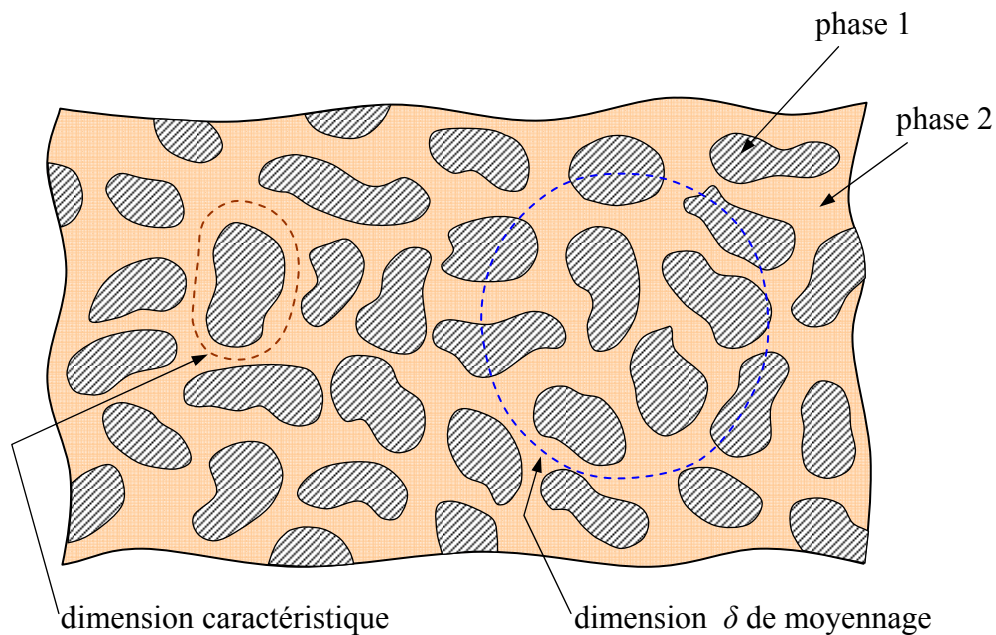


FIGURE 9.1. Homogénéisation d'un matériau hétérogène.

homogène, et les problèmes de calculs des structures peuvent être résolus en considérant les propriétés moyennes mesurées à l'échelle δ . Dans le cas où il existe une telle échelle (intermédiaire entre l'échelle microscopique, celle des constituants, et l'échelle de la structure), on dit que l'on peut *homogénéiser* le matériau. On parle alors d'*homogénéité macroscopique* (par opposition à l'échelle des constituants dite microscopique), ou d'*homogénéité statistique*. Le concept de rendre "homogène" un matériau "hétérogène" est appelé le concept d'*homogénéisation*.

Notons que l'alternative à ce concept serait de tenir compte de chaque région d'homogénéité, en analysant la continuité des contraintes et déplacements au passage de chaque interface. Si une telle approche est concevable dans son principe, elle est encore inaccessible aujourd'hui dans la pratique, compte tenu du nombre élevé d'interfaces à considérer (plusieurs milliers à plusieurs millions). Toutefois, la diminution des temps de calculs et l'augmentation des capacités mémoires des ordinateurs en permettent une approche à une échelle de plus en plus fine.

9.1.2 Modules homogénéisés

Le concept d'homogénéisation étant introduit, il est maintenant possible d'exprimer les propriétés mécaniques homogénéisées du matériau hétérogène. Ces propriétés sont déterminées sur un élément de volume V de dimension δ . Cet élément de volume est appelé *élément de volume représentatif* du matériau. Des conditions de contraintes et déformations étant imposées à la frontière de cet élément de volume, la contrainte moyenne (matrice des contraintes) sur le volume représentatif est définie par :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{V} \int_V \sigma_i(x_k) dV, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (9.1)$$

et la déformation moyenne par :

$$\bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_j(x_k) dV, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (9.2)$$

où σ_i et ε_j sont les éléments des matrices des contraintes et déformations au point x_k , et dV l'élément entourant le point x_k . Ces relations sont tout à fait générales et permettent d'expliciter les constantes de rigidité C_{ij} et de souplesse S_{ij} par les expressions :

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\varepsilon}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (9.3)$$

et

$$\bar{\varepsilon}_i = S_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (9.4)$$

C'est dans ce concept d'homogénéisation que seront par la suite considérées les constantes de rigidité et de souplesse.

Ainsi, pour déterminer les propriétés homogénéisées d'un matériau hétérogène, il est nécessaire de calculer la contrainte et la déformation moyennes sur le volume représentatif à l'aide de (9.1) et (9.2), puis d'en déduire les constantes de rigidité ou de souplesse à l'aide de (9.3) et (9.4). Si ce problème apparaît simple à résoudre dans son principe, il est en fait particulièrement complexe dans la pratique. En effet, pour appliquer les expressions (9.1) et (9.2), il est nécessaire de trouver au préalable les solutions exactes des champs des contraintes et des déformations, $\sigma_i(x_k)$ et $\varepsilon_j(x_k)$, en chaque point du matériau hétérogène. Ces solutions exactes ne peuvent être obtenues que dans le cas de modèles géométriques simples et idéalisés, et plus ou moins éloignés de la réalité.

9.2 LOI DE HOOKE POUR UN COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL

9.2.1 Constitution d'un matériau composite unidirectionnel

Un composite unidirectionnel est constitué de fibres parallèles disposées dans une matrice (figure 9.2a). Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude. La cellule élémentaire d'un tel matériau peut être considérée, en première approximation, comme constituée (figure 9.2b) d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice, à

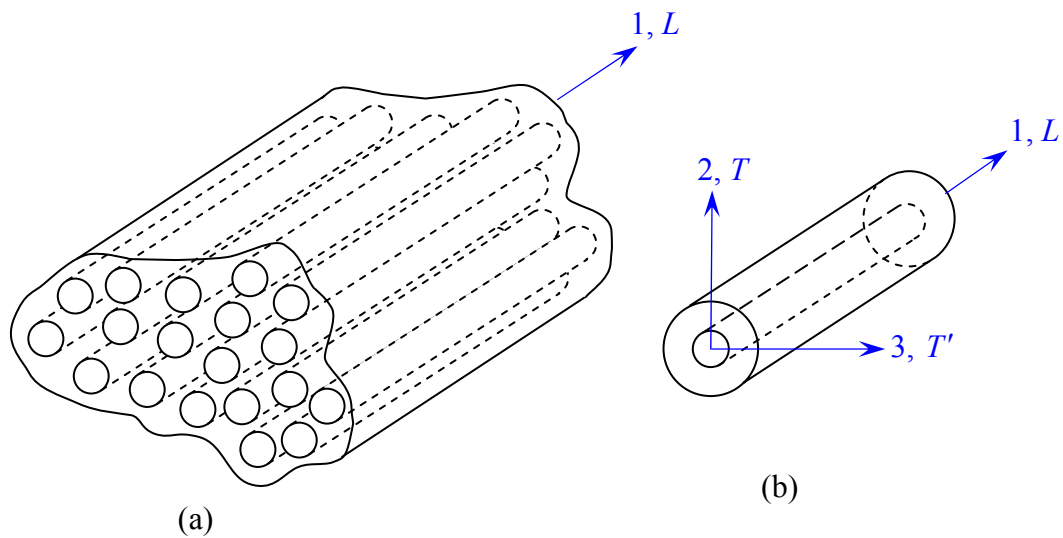


FIGURE 9.2. Composite unidirectionnel.

base circulaire ou mieux hexagonale. Nous reviendrons sur cet aspect au paragraphe 9.3.1. Cette cellule possède un axe de révolution, que nous noterons l'axe 1. Cette direction parallèle aux fibres est appelée *direction longitudinale*, et pour cette raison l'axe 1 est également noté l'axe L . Toute direction normale aux fibres est appelée *direction transversale*, et le composite est considéré comme étant isotrope transverse : il est isotrope dans le plan normal à la direction 1. Le plan transverse sera repéré par les directions 2 et 3, notées également T et T' , ces directions étant équivalentes.

9.2.2 Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel peut être décrit en introduisant (chapitre 7) soit les constantes de rigidité C_{ij} , soit les constantes de souplesse S_{ij} . Compte tenu des résultats établis au chapitre 7, relation (7.17), la loi de Hooke s'écrit suivant l'une des deux formes matricielles, la forme directe :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

ou la forme inverse :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre, et le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants :

$$\begin{aligned} & C_{11}, \quad C_{12}, \quad C_{22}, \quad C_{23}, \quad C_{66}, \\ \text{ou} & S_{11}, \quad S_{12}, \quad S_{22}, \quad S_{23}, \quad S_{66}. \end{aligned}$$

9.3 MODULES DE L'INGÉNIEUR

Les modules de l'ingénieur sont les modules d'Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement. Ces modules sont mesurés dans des essais simples tels que des essais de traction uniaxiale ou de cisaillement. Ces modules correspondent donc à une utilisation usuelle plus pratique que les constantes de rigidité ou de souplesse. Généralement, ces essais sont réalisés en imposant un champ connu de contraintes, puis en mesurant le champ des déformations. Il en résulte que les constantes de souplesse sont liées aux modules de l'ingénieur par des relations plus simples que celles exprimant les constantes de rigidité. Nous établissons ci-après ces diverses relations en considérant divers essais fondamentaux.

9.3.1 Traction longitudinale

Dans un essai de traction longitudinale, toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte σ_1 :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, 6. \end{aligned}$$

En fonction des constantes de rigidité, les équations d'élasticité (9.5) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

De ces relations, nous tirons :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \varepsilon_1,$$

et

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - 2\frac{C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \right) \varepsilon_1. \quad (9.7)$$

Nous en déduisons le *module d'Young longitudinal* E_L et le *coefficient de Poisson* ν_{LT} dans une traction longitudinale :

$$E_L = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, \quad \nu_{LT} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}. \quad (9.8)$$

En fonction des constantes de souplesse, les équations d'élasticité (9.6) s'écrivent dans un essai de traction longitudinale :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 &= S_{12}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 &= 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}. \quad (9.9)$$

9.3.2 Traction transverse

Dans un essai de traction transverse, par exemple selon la direction 2, le champ des contraintes imposé est :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0, \quad i \neq 2. \end{aligned}$$

Les équations d'élasticité, en fonction des constantes de rigidité, s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{aligned} 0 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -\frac{C_{12}(C_{23}-C_{22})}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}\varepsilon_2, \\
\varepsilon_3 &= -\frac{C_{12}^2-C_{11}C_{23}}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}\varepsilon_2, \\
\sigma_2 &= \left[C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22}-2C_{23})+C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}} \right] \varepsilon_2.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Nous en déduisons les expressions du *module d'Young transverse* E_T et des *coefficients de Poisson* ν_{21} et ν_{23} , notés respectivement ν_{TL} et $\nu_{TT'}$:

$$\begin{aligned}
E_L &= C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22}-2C_{23})+C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}, \\
\nu_{TL} &= \frac{C_{12}(C_{23}-C_{22})}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}, \\
\nu_{TT'} &= \frac{C_{12}^2-C_{11}C_{23}}{C_{12}^2-C_{11}C_{22}}.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

En introduisant les coefficients de souplesse, les équations d'élasticité en traction transverse s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2, \\
\varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2, \\
\varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2, \\
\varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.
\end{aligned}$$

Soit :

$$\varepsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{23}}{S_{22}}\varepsilon_2, \quad \sigma_2 = \frac{1}{S_{22}}\varepsilon_2, \tag{9.12}$$

et

$$E_T = \frac{1}{S_{22}}, \quad \nu_{TL} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad \nu_{TT'} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}. \tag{9.13}$$

Ces relations, comparées aux expressions (9.9), montrent que les coefficients E_L , E_T , ν_{TL} et ν_{LT} sont liés par la relation :

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}. \tag{9.14}$$

9.3.3 Cisaillement longitudinal

Un essai de cisaillement longitudinal correspond à l'un des états de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_5 \neq 0, \\ \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 5, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma_6 \neq 0, \\ \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 6. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0, \\ \sigma_6 = C_{66}\varepsilon_6. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Nous en déduisons le module de *cisaillement longitudinal* G_{LT} :

$$G_{LT} = C_{66} \quad \text{ou} \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}. \quad (9.16)$$

Les directions T et T' étant équivalentes, nous avons :

$$G_{LT'} = G_{LT} = C_{66}. \quad (9.17)$$

9.3.4 Cisaillement transverse

Dans un essai de cisaillement transverse, le champ des contraintes s'exprime par :

$$\begin{aligned} \sigma_4 \neq 0, \\ \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 4. \end{aligned}$$

D'où les relations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = 0 \quad \text{si } i \neq 4, \\ \sigma_4 = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\varepsilon_4. \end{aligned}$$

Le module de cisaillement transverse $G_{TT'}$ s'écrit donc :

$$G_{TT'} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad \text{ou} \quad G_{TT'} = \frac{1}{2(S_{22} - S_{23})}. \quad (9.18)$$

Le module de cisaillement transverse $G_{TT'}$ est lié au module d'Young transverse E_T et au coefficient de Poisson $\nu_{TT'}$, par l'expression :

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT'})}. \quad (9.19)$$

9.3.5 Compression hydrostatique latérale

L'essai de compression hydrostatique latérale sans déformation longitudinale permet également une caractérisation simple des matériaux. Dans un tel essai, les champs imposés des contraintes et déformations sont tels que :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_3 = -p, \\ \sigma_4 &= \sigma_5 = \sigma_6 = 0, \\ \varepsilon_1 &= 0, \\ \sigma_1 &\neq 0,\end{aligned}$$

où p est la pression hydrostatique imposée. Les équations d'élasticité s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ -p &= C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ -p &= C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}$$

De ces équations, nous tirons :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon_3, \\ -p &= (C_{22} + C_{23})\varepsilon_2, \\ \sigma_1 &= 2C_{12}\varepsilon_2.\end{aligned}$$

La dilatation surfacique e_s s'écrit :

$$e_s = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{2}{C_{22} + C_{23}} p.$$

D'où :

$$p = -\frac{1}{2}(C_{22} + C_{23})e_s. \quad (9.20)$$

Nous en déduisons le *module de compression latérale* K_L sans déformation longitudinale :

$$K_L = \frac{1}{2}(C_{22} + C_{23}). \quad (9.21)$$

De même en fonction des constantes de souplesse, nous obtenons :

$$K_L = \frac{1}{2\left(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}}\right)}. \quad (9.22)$$

Le module K_L est relié au module d'Young longitudinal E_L et au coefficient de Poisson ν_{LT} par l'expression :

$$K_L = \frac{C_{11} - E_L}{4\nu_{LT}^2}. \quad (9.23)$$

9.3.6 Modules en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

Nous reprenons ici la synthèse des résultats obtenus dans les paragraphes précédents. Dans ces paragraphes, nous avons introduit les modules de l'ingénieur, mesurés dans des états simples de contraintes et déformations :

- E_L et ν_{LT} , le module d'Young et le coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction longitudinale ;
- E_T , ν_{TL} , $\nu_{TT'}$, le module d'Young et le coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction transverse ;
- G_{LT} et $G_{TT'}$, les modules de cisaillement mesurés respectivement dans des essais de cisaillement longitudinal et transverse ;
- K_L , le module de compression hydrostatique mesuré dans une compression hydrostatique latérale sans déformation longitudinale.

Nous avons vu (paragraphe 9.2.2) que le comportement mécanique d'un matériau unidirectionnel est caractérisé par 5 grandeurs indépendantes. Parmi les modules de l'ingénieur, seuls 5 modules sont donc indépendants. Par exemple, nous avons les relations :

$$E_T = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{TT'}} + 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}}, \quad (9.24)$$

$$G_{TT'} = \frac{1}{2\left(\frac{2}{E_T} - \frac{1}{2K_L} - 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}\right)}, \quad (9.25)$$

$$\nu_{TT'} = \frac{E_T}{2G_{TT'}} - 1, \quad (9.26)$$

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}. \quad (9.27)$$

Les modules généralement utilisés dans la pratique sont : E_L , E_T , ν_{LT} , G_{LT} et $G_{TT'}$. Par contre, nous verrons que le module K_L peut être estimé par des relations analytiques en fonction des caractéristiques des constituants du composite, d'où l'intérêt de K_L .

Les expressions des modules en fonction des constantes de rigidité sont :

$$\begin{aligned}
E_L &= C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, & \nu_{LT} &= \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}, \\
E_T &= C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\
\nu_{TL} &= \frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, & \nu_{TT'} &= \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\
G_{LT} &= C_{66}, & G_{TT'} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), & K_L &= \frac{1}{2}(C_{22} + C_{23}).
\end{aligned} \tag{9.28}$$

Les expressions des modules en fonction des constantes de souplesse sont :

$$\begin{aligned}
E_L &= \frac{1}{S_{11}}, & \nu_{LT} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \\
E_T &= \frac{1}{S_{22}}, & \nu_{TL} &= -\frac{S_{12}}{S_{22}}, & \nu_{TT'} &= -\frac{S_{23}}{S_{22}}, \\
G_{LT} &= \frac{1}{S_{66}}, & G_{TT'} &= \frac{1}{2(S_{22} - S_{23})}, \\
K_L &= \frac{1}{2\left(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}}\right)}.
\end{aligned} \tag{9.29}$$

9.3.7 Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules

Les relations inverses, permettant de déterminer les constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules, s'obtiennent sans difficulté. Elles s'écrivent pour les constantes de rigidités :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L, \\
C_{12} &= 2K_L \nu_{LT}, \\
C_{22} &= G_{TT'} + K_L, \\
C_{23} &= -G_{TT'} + K_L, \\
C_{66} &= G_{LT}.
\end{aligned} \tag{9.30}$$

Pour les constantes de souplesse, les relations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_L}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_T}, \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_T}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{TT'}}{E_T}, \\
 S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}}.
 \end{aligned} \tag{9.31}$$

9.3.8 Restrictions sur les modules

Les modules d'élasticité ont des valeurs qui doivent être en accord avec les principes physiques de base. Par exemple, une traction sur un solide ne peut entraîner qu'une déformation dans le sens de la traction, ou une compression hydrostatique ne peut produire une dilatation du matériau. De telles considérations imposent les conditions suivantes sur les valeurs des modules :

- les modules E_L , E_T , G_{LT} , $G_{TT'}$ et K_L sont positifs :

$$E_L, E_T, G_{LT}, G_{TT'}, K_L > 0, \tag{9.32}$$

- de l'expression (9.24), on déduit :

$$\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} < 1, \quad \text{soit} \quad |\nu_{LT}| < \sqrt{\frac{E_L}{E_T}}, \tag{9.33}$$

- l'expression (9.33) combinée à (9.27) conduit à :

$$|\nu_{TL}| < \sqrt{\frac{E_T}{E_L}}, \tag{9.34}$$

- l'expression (9.19) de $G_{TT'}$ conduit de même à :

$$-1 \leq \nu_{TT'} \leq 1. \tag{9.35}$$

9.4 APPROCHES THÉORIQUES DE LA DÉTERMINATION DES MODULES D'ÉLASTICITÉ

9.4.1 Problème – Diverses approches

Le problème de la détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules (5 modules indépendants) en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants : modules d'élasticité de la matrice et des fibres, fraction volumique de fibres, longueur des fibres, etc. Nous nous limiterons dans ce paragraphe à

l'étude des composites à fibres continues. Les propriétés mécaniques des fibres et de la matrice seront caractérisées par leurs modules d'élasticité (modules d'Young et coefficient de Poisson), notés respectivement E_f , ν_f , E_m , ν_m . La résolution du problème posé n'est pas simple, et d'autre part la solution n'est pas unique. Nous présentons dans ce paragraphe une rapide synthèse du problème et de sa complexité. Le lecteur intéressé par une synthèse plus exhaustive pourra se reporter au travail critique et bibliographique effectué sur ce sujet par C.C. Chamis et G.P. Sendeckyj [6].

La complexité du problème peut être illustrée simplement en considérant le problème de la détermination de l'arrangement des fibres dans le composite unidirectionnel. En effet, ce matériau est constitué de fibres continues parallèles dont la proportion est imposée et caractérisée par la fraction volumique V_f de fibres. Dans la pratique, il n'existe pas qu'une seule possibilité d'arrangement des fibres, mais une infinité de possibilités. Par exemple, si les fibres sont réparties régulièrement, elles pourront être réparties suivant une maille hexagonale (figure 9.3), une maille carrée (figure 9.4), une maille carrée décalée (figure 9.5), etc. Les cellules élémentaires correspondantes sont reportées sur ces mêmes figures. La répartition des fibres suivant une maille carrée et celle suivant une maille carrée décalée ont la même cellule élémentaire. Ces deux répartitions diffèrent simplement par une rotation de 45° des directions principales des contraintes appliquées. Dans la pratique, lors de la fabrication d'un matériau composite unidirectionnel, les fibres sont le plus souvent réparties d'une manière aléatoire, plutôt que suivant un arrangement régulier. La répartition observée peut alors être schématisée par la représentation de la figure 9.6 : certaines fibres sont entièrement entourées de matrice, alors que d'autres peuvent se toucher. L'analyse théorique devra alors en tenir compte. D'un point de vue analytique, la solution réelle sera intermédiaire entre la solution trouvée dans le cas où toutes les fibres sont isolées les unes des autres, et la solution qui serait obtenue dans le cas où toutes les fibres seraient en contact.

L'ensemble des considérations précédentes montre donc les difficultés qui interviennent lors de l'approche théorique relative à la détermination des modules. Les méthodes utilisées peuvent être classées suivant trois types : recherche de bornes (expressions limites) en utilisant les théorèmes variationnels de l'énergie, recherche de solutions exactes, approches semi-empiriques.

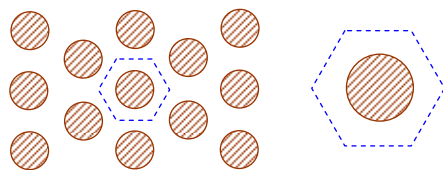


FIGURE 9.3. Arrangement hexagonal et cellule élémentaire.

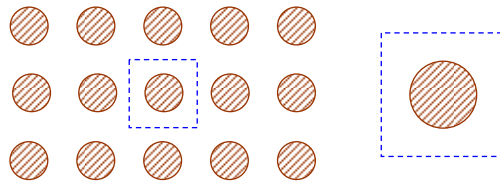


FIGURE 9.4. Arrangement carré et cellule élémentaire.

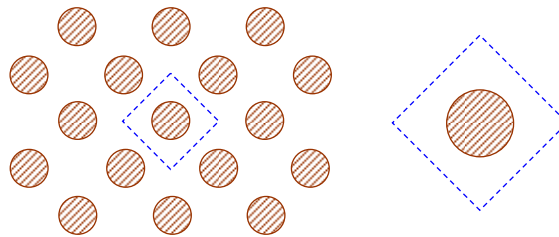


FIGURE 9.5. Arrangement carré décalé et cellule élémentaire.

Dans la recherche d'expressions limites, les théorèmes variationnels de l'énergie (tel le théorème de l'énergie potentielle totale, paragraphe 8.3) sont utilisés pour déterminer des bornes supérieures et inférieures des modules d'élasticité. Toutefois, ces approches conduisent dans bien des cas à des bornes trop éloignées pour être utilisées dans la pratique.

La recherche de solutions exactes est généralement complexe, et ne peut être abordée que dans le cas de schémas simplifiés (géométrie simplifiée de la cellule élémentaire, conditions simples imposées sur les frontières de la cellule, etc.). La résolution peut être abordée soit par une méthode analytique, soit par une méthode numérique de type éléments finis.

Enfin, les méthodes semi-empiriques permettent d'aboutir à des relations facilement adaptables à la pratique, mais ne permettent pas une réelle prédiction des propriétés. Elles restent donc descriptives.

Dans les paragraphes suivants, nous abordons certains éléments de ces diverses approches.

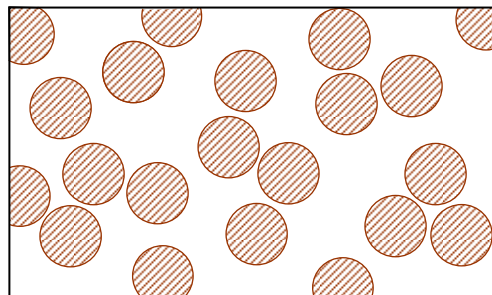


FIGURE 9.6. Représentation schématique de l'arrangement réel des fibres.

9.4.2 Bornes sur les modules d'élasticité

La détermination de bornes sur les modules d'élasticité utilise les théorèmes variationnels de l'énergie. Dans une approche déplacements, le théorème de l'énergie potentielle totale (8.46) permet de trouver les bornes supérieures, alors que le théorème de l'énergie potentielle complémentaire permet, dans le cadre d'une approche contraintes, d'accéder aux bornes inférieures [7].

Parmi les divers travaux effectués dans ce cadre, nous citerons d'une part les travaux de Z. Hashin [8] et R. Hill [9], effectués dans le cas de fibres de différents diamètres réparties au hasard (figure 9.7) mais avec une proportion donnée en volume. D'autre part, Z. Hashin et B.W. Rosen [10] ont effectué des travaux analogues dans le cas de fibres de diamètres identiques réparties suivant un arrangement hexagonal (figure 9.8). L'écriture des expressions trouvées est facilitée en introduisant les *modules de compression latérale* (sans déformation longitudinale) K_m et K_f , respectivement de la matrice et des fibres. Ces modules sont liés aux modules de compressibilité (7.41) (k_m , k_f) et aux modules de cisaillement (G_m , G_f) par les expressions :

$$K_i = k_i + \frac{G_i}{3}, \quad i = m, f. \quad (9.36)$$

Les modules (k_m , k_f) et (G_m , G_f) s'expriment eux-mêmes (tableau 7.1) à l'aide des modules d'Young (E_m , E_f) et coefficients de Poisson (ν_m , ν_f) de la matrice et des fibres selon :

$$k_i = \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)}, \quad i = m, f, \quad (9.37)$$

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad i = m, f. \quad (9.38)$$

Soit, finalement :

$$K_i = \frac{E_i}{2(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}, \quad i = m, f. \quad (9.39)$$

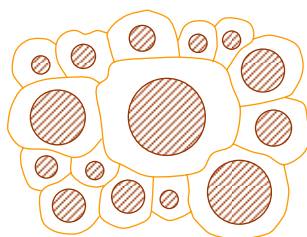


FIGURE 9.7. Arrangement aléatoire de fibres.

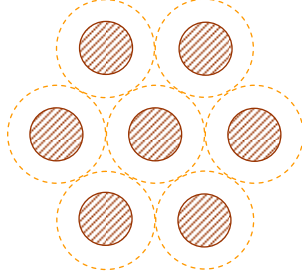


FIGURE 9.8. Arrangement hexagonal de fibres de mêmes diamètres.

En reprenant les notations introduites au paragraphe 9.3, les limites sur les cinq modules indépendants, obtenues par Z. Hashin [8] et R. Hill [9] sont données par les expressions :

$$K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{K_f - K_m} + \frac{1 - V_f}{K_m + G_m}} \leq K_L \leq K_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{K_m - K_f} + \frac{V_f}{K_f + G_f}}, \quad (9.40)$$

$$\begin{aligned} G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + (1 - V_f) \frac{K_m + 2G_m}{2G_m(K_m + G_m)}} \\ \leq G_{TT'} \leq G_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{G_m - G_f} + V_f \frac{K_f + 2G_f}{2G_f(K_f + G_f)}}, \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{1 - V_f}{2G_m}} \leq G_{LT} \leq G_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{G_m - G_f} + \frac{V_f}{2G_f}}, \quad (9.42)$$

$$\frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \leq \frac{E_L - E_f V_f - E_m(1 - V_f)}{4(\nu_f - \nu_m)^2} \leq \frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}}, \quad (9.43)$$

$$\frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \leq \frac{\nu_{LT} - \nu_f V_f - \nu_m(1 - V_f)}{(\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)} \leq \frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}}. \quad (9.44)$$

9.4.3 Solutions exactes

9.4.3.1 Introduction

La recherche de solutions exactes s'effectue, dans le cas d'arrangements particuliers de fibres, par l'une des approches classiques de la mécanique des solides déformables (chapitre 8). Nous présentons dans ce paragraphe une approche analytique (de type déplacements) du problème d'une cellule élémentaire cylindrique soumise à une traction. Le modèle géométrique retenu pour la cellule élémentaire (figure 9.9) est une fibre cylindrique de rayon r_f , entourée d'un cylindre de matrice r_m . Ces rayons sont reliés à la fraction volumique V_f de fibres par la relation :

$$V_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}. \quad (9.45)$$

9.4.3.2 Problème préalable : cylindre soumis à une traction uniforme

Nous avons à résoudre au préalable le problème d'un cylindre de matériau homogène isotrope soumis à une traction uniforme (figure 9.10) dans la direction de l'axe du cylindre. La symétrie de révolution du problème impose l'utilisation des coordonnées cylindriques (paragraphe 8.2.3). Nous considérons le champ des déplacements suivant :

$$\begin{aligned} u_r &= Ar + \frac{B}{r}, \\ u_\theta &= 0, \\ w &= Cz, \end{aligned} \quad (9.46)$$

défini en tout point M du cylindre, sauf au voisinage de l'axe ($r = 0$). Il est aisé de montrer que ce champ est solution du problème d'élasticité considéré si $r \neq 0$. En effet, d'après (8.25), le champ des déformations au point M s'écrit :

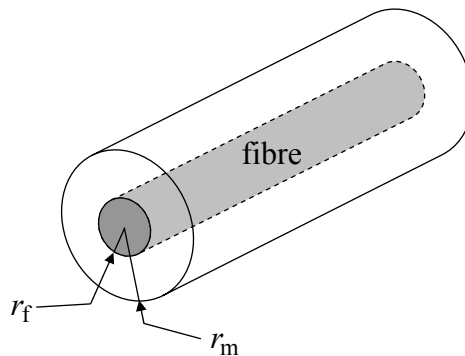


FIGURE 9.9. Cellule élémentaire cylindrique d'un composite unidirectionnel.

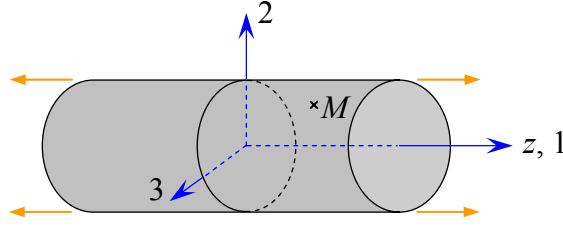


FIGURE 9.10. Cylindre soumis à une traction uniforme.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (9.47)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} u_r = A + \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = C. \end{aligned} \quad (9.48)$$

On trouve sans difficulté, à partir de ces relations, que les conditions de compatibilité (6.18) sont vérifiées. Le champ des contraintes est ensuite déterminé à partir des relations d'élasticité (7.24). Soit :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (9.49)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2K \left[A + \nu C - (1 - 2\nu) \frac{B}{r^2} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2K \left[A + \nu C + (1 - 2\nu) \frac{B}{r^2} \right], \\ \sigma_{zz} &= 2K [2\nu A + (1 - \nu) C], \end{aligned} \quad (9.50)$$

en introduisant le module de compression latérale défini en (9.39). Ces expressions vérifient les équations d'équilibre (8.26). Il en résulte que le champ des déplacements introduit (9.46) est bien la solution du problème d'élasticité considéré. Les constantes A , B et C sont à déterminer en fonction des conditions imposées sur les frontières.

9.4.3.3 *Fibre entourée d'un cylindre de matrice dans le cas d'une traction*

Nous étudions maintenant le problème de la cellule cylindrique (figure 9.9) soumise à une traction uniforme. Deux types de conditions peuvent être imposés :

— soit les déformations en traction sont imposées : $\varepsilon_{zz} = \varepsilon$, (9.51)

— soit les contraintes en traction sont imposées : $\sigma_{zz} = \sigma$. (9.52)

Nous étudions le cas où les déformations sont imposées. Le cas de contraintes imposées conduirait à des résultats similaires. Comme champs des déplacements dans la matrice et dans la fibre, nous adoptons des champs du type (9.46). Toutefois, le déplacement dans la fibre étant fini lorsque r tend vers zéro impose que le coefficient B soit nul dans la fibre. Nous retenons donc comme champ des déplacements :

— dans la fibre :

$$\begin{aligned} u_{rf} &= A_f r, \\ u_{\theta f} &= 0, \\ w_f &= C_f z, \end{aligned} \quad (9.53)$$

— dans la matrice :

$$\begin{aligned} u_{rm} &= A_m r + \frac{B_m}{r}, \\ u_{\theta m} &= 0, \\ w_m &= C_m z. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Les déformations dans la matrice et dans la fibre sont respectivement :

$$\varepsilon_{zzm} = C_m \quad \text{et} \quad \varepsilon_{zzf} = C_f.$$

La condition de déformations longitudinales imposées (9.51) ($\varepsilon_{zzf} = \varepsilon_{zzm} = \varepsilon$) conduit à :

$$C_f = C_m = \varepsilon. \quad (9.55)$$

Les autres constantes A_f , A_m et B_m sont déterminées à partir :

— des conditions imposées sur la frontière ($r = r_m$) :

$$\sigma_{rrm} = 0, \quad (9.56)$$

— des conditions de continuité à l'interface fibre-matrice ($r = r_f$) :

• sur les déplacements :

$$\begin{aligned} u_{rf} &= u_{rm}, \\ u_{zf} &= u_{zm} \quad (\text{continuité assurée par (9.55)}), \end{aligned} \quad (9.57)$$

• sur les contraintes radiales :

$$\sigma_{rrf} = \sigma_{rrm}. \quad (9.58)$$

Ayant déterminé les constantes A_f , A_m et B_m , les modules d'élasticité seront obtenus à partir des relations (9.3). Dans le cas de la traction considérée, nous obtiendrons donc :

— le module longitudinal E_L :

$$E_L = E_{11} = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\varepsilon},$$

soit :

$$E_L = \frac{1}{\pi r_m^2 \varepsilon} \int_S \sigma_{zz}(r) dS, \quad (9.59)$$

où S est la section droite de la cellule;

— le coefficient de Poisson ν_{LT} :

$$\nu_{LT} = \nu_{12} = -\frac{u_{rm}(r=r_m)}{\varepsilon r_m}. \quad (9.60)$$

Les conditions imposées à la frontière (9.56), à l'interface (9.58) et les expressions précédentes des modules montrent la nécessité de déterminer au préalable les expressions des contraintes σ_{rr} et σ_{zz} . Ces expressions sont déduites des relations (9.50). Soit :

— dans la fibre :

$$\sigma_{rrf} = 2K_f (A_f + \nu_f \varepsilon), \quad (9.61)$$

$$\sigma_{zzf} = 2K_f [2\nu_f A_f + (1 - \nu_f) \varepsilon]. \quad (9.62)$$

— dans la matrice :

$$\sigma_{rrm} = 2K_m \left[A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r^2} \right], \quad (9.63)$$

$$\sigma_{zzm} = 2K_m [2\nu_m A_m + (1 - \nu_m) \varepsilon]. \quad (9.64)$$

Les conditions (9.57) et (9.58) de continuité à l'interface fibre-matrice ($r = r_f$) imposent :

$$A_f r_f = A_m r_f + \frac{B_m}{r_f}, \quad (9.65)$$

$$K_f (A_f + \nu_f \varepsilon) = K_m \left[A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r_f^2} \right], \quad (9.66)$$

et la condition (9.56) à la frontière ($r = r_m$) s'écrit :

$$A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r_m^2} = 0. \quad (9.67)$$

Les trois conditions précédentes permettent de trouver les constantes A_m , B_m et A_f . Soit :

$$\begin{aligned}
A_m &= A\varepsilon, \\
A_f &= \left[A \left(1 + \frac{1}{1-2\nu_m} \frac{r_m^2}{r_f^2} \right) + \frac{\nu_m}{1-2\nu_m} \frac{r_m^2}{r_f^2} \right] \varepsilon, \\
B_m &= \frac{A + \nu_m}{1-2\nu_m} r_m^2 \varepsilon,
\end{aligned} \tag{9.68}$$

avec :

$$A = - \frac{\frac{\nu_m}{K_f} (1 - V_f) + \frac{\nu_m}{G_m} + \frac{\nu_f}{K_m} V_f}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}}. \tag{9.69}$$

Les constantes étant obtenues, le module d'Young longitudinal est déterminé à partir de la relation (9.59). Soit dans le cas de coordonnées cylindriques :

$$E_L = \frac{1}{\pi r_m^2 \varepsilon} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_m} \sigma_{zz}(r) r \, dr \, d\theta,$$

ou

$$E_L = \frac{2}{r_m^2 \varepsilon} \left[\int_0^{r_f} r \sigma_{zzf}(r) \, dr + \int_{r_f}^{r_m} r \sigma_{zzm}(r) \, dr \right]. \tag{9.70}$$

D'après (9.62), (9.64), (9.68) et (9.69), les contraintes σ_{zz} s'écrivent :

— dans la fibre :

$$\sigma_{zzf}(r) = 2K_f C_{zf} \varepsilon,$$

avec

$$C_{zf} = 1 - \nu_f + 2\nu_f \left[A + \frac{1}{1-2\nu_m} \frac{1}{V_f} (A + \nu_m) \right], \tag{9.71}$$

— dans la matrice :

$$\sigma_{zzm}(r) = 2K_m C_{zm} \varepsilon,$$

avec

$$C_{zm} = 1 - \nu_m + 2\nu_m A. \tag{9.72}$$

En reportant les relations (9.71) et (9.72) dans l'expression (9.70) du module, nous obtenons :

$$E_L = 2K_f C_{zf} V_f + 2K_m C_{zm} (1 - V_f).$$

Le développement de cette relation conduit finalement à l'expression du module longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) + \frac{4(\nu_f - \nu_m)^2 V_f (1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}}. \tag{9.73}$$

De même, l'exploitation de la relation (9.60) conduit à l'expression du coefficient de Poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) + \frac{(\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right) V_f (1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}}. \quad (9.74)$$

Les relations (9.73) et (9.74) ainsi obtenues sont identiques aux bornes inférieures du module longitudinal (9.43) et du coefficient de Poisson (9.44). D'autre part, des applications numériques, effectuées sur les expressions (9.73) et (9.74), montrent que ces expressions sont pratiquement confondues avec les lois des mélanges que nous établirons simplement aux paragraphes 9.4.4.1 et 9.4.4.3.

9.4.3.4 Autres modules

De la même manière, il est possible de trouver les solutions exactes de deux autres problèmes d'élasticité de la cellule cylindrique :

- le cisaillement longitudinal (paragraphe 9.3.3),
- la compression hydrostatique latérale (paragraphe 9.3.5).

La résolution du premier problème conduit à l'expression du module de cisaillement longitudinal :

$$G_{LT} = G_{12} = G_m \frac{G_f (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_f (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)}, \quad (9.75)$$

alors que le second problème aboutit à l'expression du module de compression latérale :

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1 - V_f}{k_m + \frac{4}{3}G_m}}. \quad (9.76)$$

Les relations (9.73) à (9.76) ont été établies par R. Hill [9] et Z. Hashin [11]. La relation (9.75) obtenue pour le module de cisaillement longitudinal est identique à la borne inférieure (9.42). De même, l'expression (9.76) est confondue avec la borne inférieure de K_L (9.40).

Ayant trouvé quatre modules indépendants, il reste à en exprimer un cinquième, par exemple le module de cisaillement transverse $G_{TT'} = G_{23}$, déterminé dans un essai de cisaillement transverse (paragraphe 9.3.4). Toutefois, aucune solution analytique exacte n'a été trouvée au problème du cisaillement transverse de la cellule élémentaire cylindrique. Aucune expression du module $G_{TT'}$, analogue aux expressions précédentes trouvées pour les autres modules, ne peut donc être proposée dans ce contexte. Cette constatation aboutit à envisager une autre approche abordée dans le paragraphe suivant.

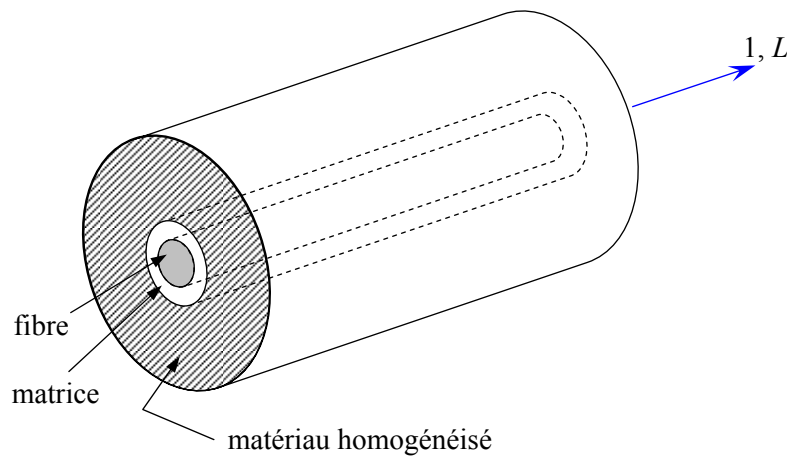


FIGURE 9.11. Modèle cylindrique à trois phases.

9.4.3.5 *Modèle pour la détermination du module de cisaillement transverse*

La méthode utilisée pour lever les difficultés évoquées dans le paragraphe précédent consiste à considérer un modèle cylindrique à trois phases (figure 9.11). Dans ce modèle, la cellule cylindrique élémentaire est entourée d'un cylindre de grandes dimensions, constitué par le matériau équivalent homogénéisé et possédant donc les propriétés effectives homogénéisées du matériau composite. Ce cylindre est soumis sur ses frontières extérieures aux conditions de l'essai de cisaillement transversal. Un tel modèle a été développé par R.M. Christensen et K.H. Lo [7,13], à partir des travaux effectués par J.J. Hermans [12]. Ce modèle conduit à l'expression du module transverse :

$$G_{TT'} = G_m \left(1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{k_m + \frac{7}{3}G_m}{2k_m + \frac{8}{3}G_m} (1 - V_f)} \right). \quad (9.77)$$

Cette expression est confondue avec la borne inférieure (9.41) de $G_{TT'}$.

9.4.4 Approches simplifiées

Des expressions simplifiées et pratiques des modules peuvent être obtenues en faisant une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du matériau composite unidirectionnel. Nous développons ces expressions dans le présent paragraphe.

9.4.4.1 *Module d'Young longitudinal*

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale (figure 9.12). L'hypothèse simplificatrice est de supposer une

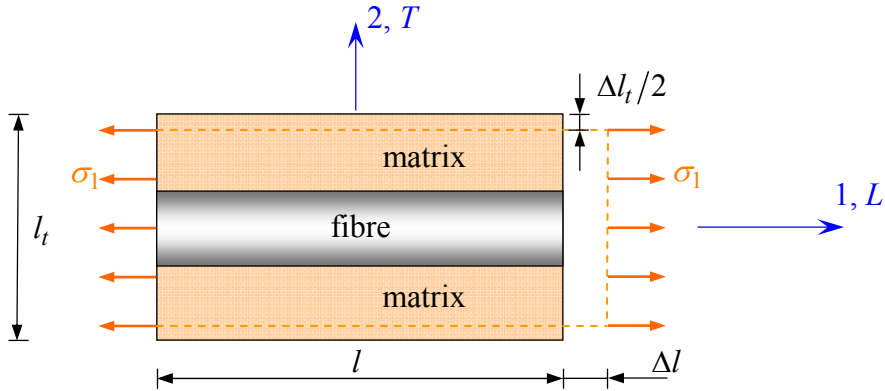


FIGURE 9.12. Schéma simplifié d'une traction longitudinale.

déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice. Si Δl est l'allongement de la cellule (identique à celui de la fibre et de la matrice), la déformation longitudinale imposée à la cellule est :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l},$$

où l est la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1. \quad (9.78)$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \sigma_f &= E_f \varepsilon_1, \\ \sigma_m &= E_m \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (9.79)$$

La charge totale appliquée est :

$$F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m,$$

où S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice. Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne $\sigma_1 = F_1/S$ s'écrit :

$$\sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f). \quad (9.80)$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal :

$$\sigma_1 = E_L \varepsilon_1. \quad (9.81)$$

La combinaison des relations (9.79) à (9.81) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f). \quad (9.82)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi des mélanges* pour le module

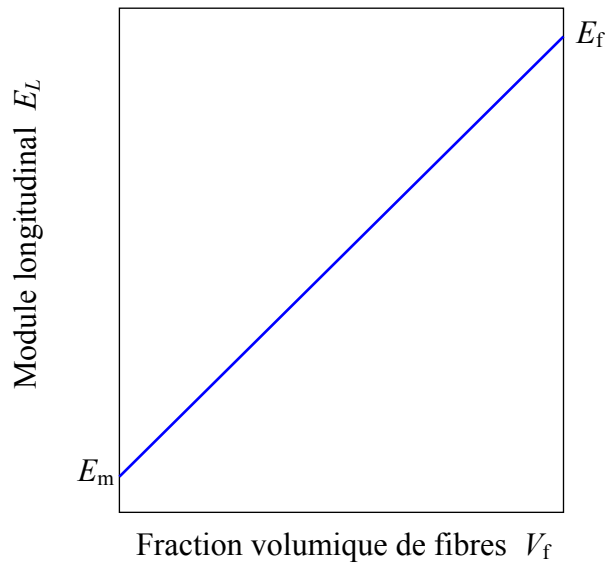


FIGURE 9.13. Loi des mélanges pour le module d'Young longitudinal.

d'Young dans la direction des fibres. Cette loi des mélanges est schématisée sur la figure 9.13. La variation du module est linéaire entre les valeurs E_m module de la matrice et E_f module des fibres, lorsque la fraction volumique V_f de fibres varie de 0 à 1.

9.4.4.2 Module d'Young transverse

Le module d'Young transverse est déterminé dans un essai de traction transverse où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres. Une expression simplifiée de ce module peut être obtenue dans un schéma simpliste à deux dimensions. Dans un tel schéma, une tranche de matériau composite, d'épaisseur donnée, est considérée comme étant constituée (figure 9.14) de couches successives, possédant alternativement les propriétés des fibres et de la matrice. La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m}. \quad (9.83)$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2. \quad (9.84)$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m}. \quad (9.85)$$

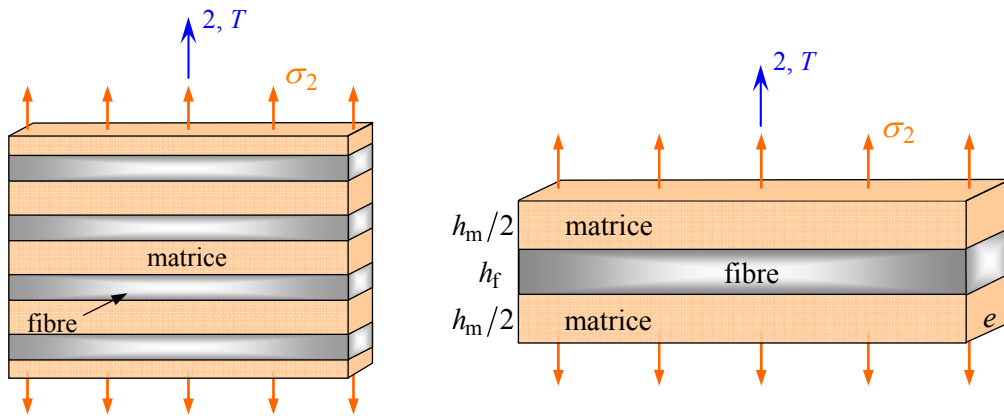


FIGURE 9.14. Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.

L'allongement transverse d'une cellule élémentaire résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice. Soit :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m,$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m}.$$

Soit :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f). \quad (9.86)$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transverse :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2. \quad (9.87)$$

La combinaison des expressions (9.85) à (9.87) conduit à l'expression du module transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m}. \quad (9.88)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi inverse des mélanges* et peut être réécrite, en rapportant le module transverse au module d'Young de la matrice, suivant une relation sans dimension sous la forme :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + \left(\frac{E_m}{E_f} - 1 \right) V_f}. \quad (9.89)$$

Le tableau 9.1 donne les valeurs de E_T/E_m pour trois valeurs du rapport E_f/E_m . Il est à noter que, par exemple dans le cas d'un rapport $E_f/E_m = 100$, un volume de fibres de 50 % est nécessaire pour atteindre un module d'Young transverse double

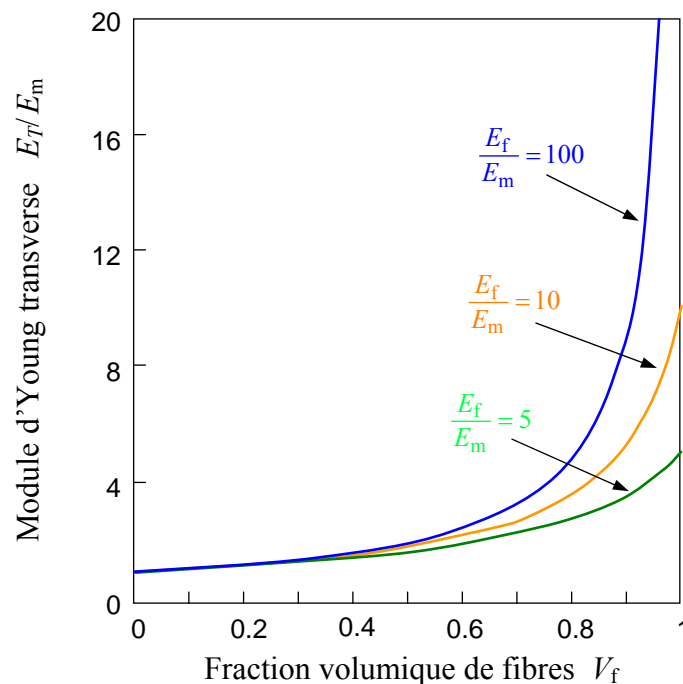
TABLEAU 9.1. Valeurs de E_T/E_m pour diverses valeurs du rapport E_f/E_m et de la fraction V_f de fibres.

| E_f/E_m | V_f | | | | | | | | | |
|-----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-----|
| | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 1 |
| 5 | 1 | 1,19 | 1,47 | 1,67 | 1,92 | 2,27 | 2,78 | 3,57 | 4,17 | 5 |
| 10 | 1 | 1,22 | 1,56 | 1,82 | 2,17 | 2,70 | 3,57 | 5,26 | 6,90 | 10 |
| 100 | 1 | 1,25 | 1,66 | 1,98 | 2,46 | 3,25 | 4,80 | 9,17 | 16,81 | 100 |

du module de la matrice. Ce résultat montre que les fibres participent peu au module transverse. La variation du module E_T en fonction de la fraction volumique de fibres est reportée sur la figure 9.15 pour plusieurs valeurs (5, 10, 100) du rapport E_f/E_m .

9.4.4.3 Coefficient de Poisson longitudinal

Pour déterminer le coefficient de Poisson longitudinal ν_{LT} , nous reprenons le schéma précédent dans lequel le composite unidirectionnel est schématisé par couches successives. Le coefficient ν_{LT} est déterminé dans un essai de traction longitudinale, schématisé sur la figure 9.16. Ce schéma diffère de celui du paragraphe 9.4.4.1 par la modélisation de la cellule élémentaire : modélisation de la fibre et de la matrice sous forme cylindrique sur la figure 9.12 et modélisation par couches sur la figure 9.16.

FIGURE 9.15. Variation du module E_T en fonction de la fraction volumique V_f de fibres.

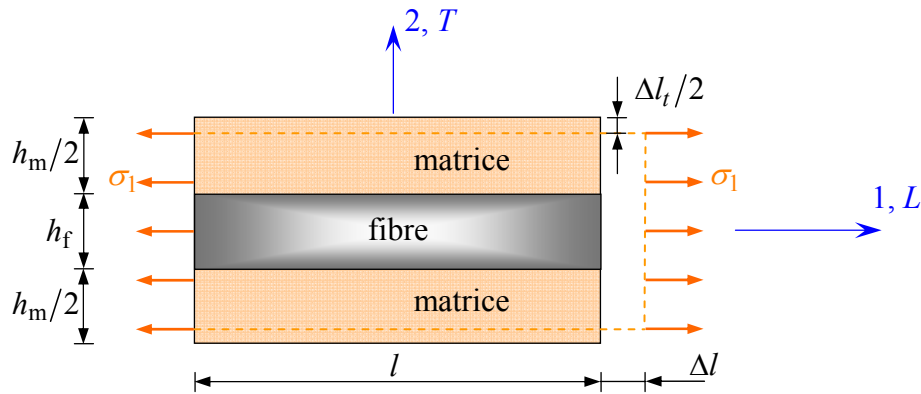


FIGURE 9.16. Schéma par couches d'une traction longitudinale.

Comme dans le paragraphe 9.4.4.1, fibre et matrice subissent des déformations identiques (9.78). Il en résulte que les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2m} &= -\nu_m \varepsilon_1, \\ \varepsilon_{2f} &= -\nu_f \varepsilon_1.\end{aligned}$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\nu_m \varepsilon_1 h_m - \nu_f \varepsilon_1 h_f,$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_f + h_m} = -[\nu_m (1 - V_f) + \nu_f V_f] \varepsilon_1.$$

D'où l'expression du coefficient de Poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f). \quad (9.90)$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal. La variation de ν_{LT} en fonction de la fraction volumique de fibres est linéaire entre ν_m et ν_f . Dans la pratique, les valeurs de ν_m et ν_f sont assez proches (voisines de 0,3). Le coefficient de Poisson ν_{LT} restera donc également proche de cette valeur.

9.4.4.4 Module de cisaillement longitudinal

Le module de cisaillement longitudinal G_{LT} est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure 9.17, en utilisant à nouveau la modélisation par couches du composite unidirectionnel. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes τ imposées sur la cellule. Les déformations en cisaillement de la fibre et de la

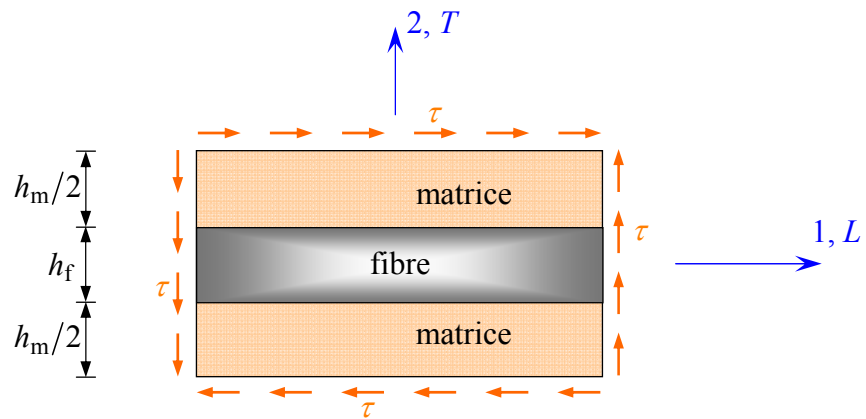


FIGURE 9.17. Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal.

matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{et} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m}. \quad (9.91)$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice (figure 9.18) sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m.$$

La déformation totale de la cellule (figure 9.18) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m.$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f). \quad (9.92)$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement

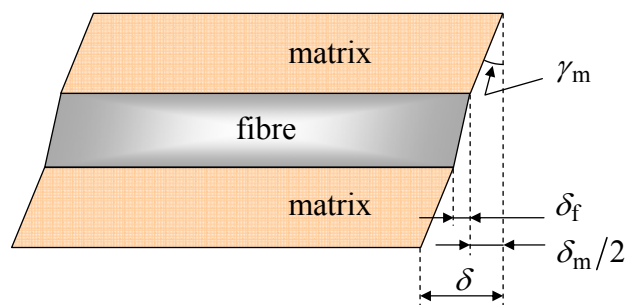


FIGURE 9.18. Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.

longitudinal G_{LT} suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}}. \quad (9.93)$$

En combinant les expressions (9.91) à (9.93), nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m}. \quad (9.94)$$

Cette expression a une forme identique à celle obtenue (9.88) pour le module d'Young transverse. Les mêmes considérations peuvent être transposées ici.

9.4.5 Équations d'Halpin-Tsai

À partir des résultats obtenus dans les analyses théoriques (paragraphe 9.4.3 et 9.4.4), J.C. Halpin et S.W. Tsai [14] ont proposé des équations générales et simples de formulation. Les modules d'un matériau composite unidirectionnel sont exprimés :

- par la loi des mélanges pour le module E_L et le coefficient ν_{LT} :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f),$$

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f),$$

- et par l'expression générale suivante pour les autres modules :

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f}, \quad (9.95)$$

expression dans laquelle :

- le coefficient η s'exprime par :

$$\eta = \frac{(M_f/M_m) - 1}{(M_f/M_m) + \xi}, \quad (9.96)$$

- M est le module considéré : E_T , G_{LT} ou ν_{TT} ;
- M_f le module correspondant des fibres : E_f , G_f ou ν_f ;
- M_m le module de la matrice : E_m , G_m ou ν_m .

Le facteur ξ est une mesure du renforcement des fibres et dépend de la géométrie des fibres, de l'arrangement des fibres et du type d'essai (donc du module considéré).

Si la simplicité des relations est effectivement séduisante, l'application à la conception n'est en fait que théorique. En effet, la difficulté d'utilisation de la relation (9.95) réside dans la détermination de valeurs appropriées de ξ . Les

valeurs de ce facteur ne peuvent être déterminées que par comparaison avec une solution analytique (nous sommes alors ramenés à la résolution du problème d'élasticité), ou par ajustement avec des courbes expérimentales.

Par exemple, J.C. Halpin et S.W. Tsai obtiennent un excellent accord avec les résultats obtenus par D.F. Adams et D.R. Doner [15, 16] par une méthode de différences finies appliquée au cas de fibres cylindriques réparties suivant un arrangement carré et pour une fraction volumique de fibres de 0,55, en prenant :

- $\xi = 2$ pour déterminer le module E_T ,
- $\xi = 1$ pour déterminer le module G_{LT} .

Une discussion plus approfondie et relative à la comparaison entre l'expression (9.95) et diverses solutions exactes (analytiques ou numériques) est développée dans la référence [14]. Finalement, l'ensemble des résultats montre que si la relation (9.95) est bien adaptée à une description des propriétés du matériau composite unidirectionnel, elle ne permet pas de résoudre le problème de la prévision de ces propriétés. Ces considérations montrent donc la limitation de formules semi-empiriques du type (9.95), pour une application à la conception des structures en matériaux composites.

9.5 VALEURS NUMÉRIQUES DES MODULES

9.5.1 Valeurs expérimentales des modules

Le tableau 9.2 donne les caractéristiques mécaniques mesurées sur des composites unidirectionnels à matrice époxyde, avec diverses fibres : fibres de verre E et R, fibres de carbone HM et HR, fibres de Kevlar. La fraction volumique de fibres est la même pour les trois composites : 0,60. Nous comparons, dans le paragraphe suivant, ces valeurs expérimentales aux valeurs théoriques obtenues à partir des diverses relations établies.

Pour calculer ces valeurs numériques, il est nécessaire au préalable de déterminer les valeurs des divers modules des fibres et de la matrice, par les expressions :

— pour les fibres :

- module de cisaillement $G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}$,
- module de compressibilité $k_f = \frac{E_f}{3(1-2\nu_f)}$, (9.97)
- module de compression latérale $K_f = k_f + \frac{G_f}{3}$,

— pour la matrice :

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}, \quad k_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}, \quad K_m = k_m + \frac{G_m}{3}. \quad (9.98)$$

TABLEAU 9.2. Caractéristiques mécaniques mesurées sur divers composites matrice époxyde-fibres unidirectionnelles.

| | | | Verre | | Carbone | | Kevlar 49 |
|---|--|--------------------------------|-------|------|---------|------|--------------|
| | | | E | R | HM | HR | |
| Propriétés mesurées sur des monofilaments | Masse volumique | ρ_f (kg/m ³) | 2600 | 2550 | 1950 | 1750 | 1450 |
| | Module d'Young | E_f (GPa) | 73 | 86 | 380 | 260 | 135 |
| | Coefficient de Poisson | ν_f | 0,22 | 0,22 | — | — | — |
| | Contrainte à la rupture | σ_{fu} (MPa) | 3400 | 4400 | 2200 | 2500 | 3500 |
| | Allongement à la rupture | ε_{fu} (%) | 4,5 | 5,2 | 0,6 | 1,0 | 2,5 |
| Caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel à matrice époxyde | Fraction volumique | V_f | 0,60 | 0,60 | 0,60 | 0,60 | 0,60 |
| | Masse volumique | ρ_c (kg/m ³) | 2040 | 2010 | 1650 | 1550 | 1370 |
| | Module d'Young longitudinal | E_L (GPa) | 46 | 52 | 230 | 159 | 84 |
| | Module d'Young transversal | E_T (GPa) | 10 | 13,6 | 14,4 | 14,3 | 5,6 |
| | Module de cisaillement longitudinal | G_{LT} (GPa) | 4,6 | 4,7 | 4,9 | 4,8 | 2,1 |
| | Coefficient de Poisson | ν_{LT} | 0,31 | 0,31 | 0,32 | 0,32 | 0,34 |
| | Contrainte de rupture en traction | σ_{cu} (MPa) | 1400 | 1900 | 800 | 1380 | 1400 |
| | Contrainte de rupture en flexion | (MPa) | 1500 | 1500 | 1250 | 1850 | — |
| | Contrainte de rupture en compression | (MPa) | 910 | 970 | 900 | 1430 | 280 |
| | Contrainte de rupture en cisaillement | (MPa) | 70 | 70 | 70 | 80 | 70 |
| | Caractéristiques spécifiques | E_L/ρ_c (MN m/kg) | 22,5 | 25,9 | 139 | 103 | 61 |
| | | σ_{cu}/ρ_c (kN m/kg) | 686 | 945 | 485 | 890 | 1022 |

Matrice époxyde: $E_m = 3,45$ GPa, $\nu_m = 0,30$, $\sigma_{mu} = 70$ MPa, $\rho_m = 1200$ kg/m³.

Les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau 9.3. Pour déterminer les modules des fibres, il est nécessaire de connaître le coefficient de Poisson ν_f . Sa valeur ne peut être déterminée directement sur les fibres. Lorsque cette valeur est reportée (cas des fibres de verres E et R), elle correspond à une valeur déterminée sur le matériau massif. Pour accéder à la valeur du coefficient de Poisson (lorsque la détermination expérimentale sur le matériau massif ne peut être effectuée), on utilise assez souvent la valeur mesurée pour ν_{LT} sur le matériau composite unidirectionnel (tableau 9.2). La valeur de ν_f en est déduite en utilisant la loi des mélanges (9.90). C'est cette approche que nous avons utilisée pour déterminer (tableau 9.3) les valeurs de ν_f pour les fibres de carbone et de Kevlar.

TABLEAU 9.3. Modules d'élasticité des fibres et de la matrice.

| | Modules | Verre | | Carbone | | Kevlar 49 |
|---------|--------------------------|-------|------|---------|-------|--------------|
| | | E | R | HM | HR | |
| Fibres | E_f expérimental (GPa) | 73 | 86 | 380 | 260 | 135 |
| | ν_f expérimental | 0,22 | 0,22 | — | — | — |
| | ν_f calculé | — | — | 0,33 | 0,33 | 0,37 |
| | G_f (GPa) | 29,9 | 35,2 | 142,9 | 97,7 | 49,3 |
| | k_f (GPa) | 43,5 | 51,2 | 372,5 | 254,9 | 173,1 |
| | K_f (GPa) | 53,4 | 62,9 | 420,2 | 287,5 | 189,5 |
| Matrice | E_m expérimental (GPa) | 3,45 | | | | |
| | ν_m expérimental | 0,30 | | | | |
| | G_m (GPa) | 1,33 | | | | |
| | k_m (GPa) | 2,875 | | | | |
| | K_m (GPa) | 3,32 | | | | |

9.5.2 Comparaison entre valeurs expérimentales et calculées des modules

À partir des valeurs reportées dans le tableau 9.3, nous avons calculé les valeurs des modules des composites unidirectionnels, déterminées à partir des diverses expressions théoriques (tableau 9.4) :

- le *module d'Young longitudinal* E_L , obtenu à partir de la loi des mélanges (9.82);
- le *module de cisaillement longitudinal* G_{LT} , calculé à partir de la relation (9.75);
- le *module de compression latérale* K_L , relation (9.76);
- le *module de cisaillement transverse* $G_{TT'}$, relation (9.77);
- le *module d'Young transverse* E_T , calculé à partir des valeurs précédentes de K_L , $G_{TT'}$, ν_{LT} et E_L , par la relation (9.24);
- le *module d'Young transverse* E_T et le *module de cisaillement longitudinal* G_{LT} , à partir des *approches simplifiées*, relations (9.88) et (9.94);
- les bornes *inférieures* (notées : -) et *supérieures* (notées : +) de K_L , $G_{TT'}$, G_{LT} , données par les relations (9.40), (9.41) et (9.42). Rappelons que les bornes inférieures (9.40), (9.41) et (9.42) coïncident avec les valeurs calculées par (9.76), (9.77) et (9.75).

TABLEAU 9.4. Valeurs des modules des composites unidirectionnels, déterminées à partir des expressions théoriques.

| | | | Verre | | Carbone | | Kevlar |
|---|----------------------------------|--|-------|------|---------|-------|--------|
| | | | E | R | HM | HR | 49 |
| Solutions exactes de problèmes particuliers | E_L (mélanges) (GPa) | | 45,2 | 53,0 | 229,4 | 157,4 | 82,4 |
| | ν_{LT} (mélanges) | | 0,25 | 0,25 | — | — | — |
| | ν_{LT} expérimental | | 0,31 | 0,31 | 0,32 | 0,32 | 0,34 |
| | G_{LT} (9.75) (GPa) | | 4,57 | 4,67 | 5,14 | 5,06 | 4,83 |
| | K_L (9.76) (GPa) | | 8,98 | 9,15 | 10,10 | 10,02 | 9,88 |
| | $G_{TT'}$ (9.77) (GPa) | | 3,96 | 4,02 | 4,32 | 4,27 | 4,13 |
| | E_T (9.24) (GPa) | | 10,8 | 11,0 | 12,0 | 11,9 | 11,5 |
| Approches simplifiées | E_T (9.88) (GPa) | | 8,05 | 8,13 | 8,50 | 8,45 | 8,30 |
| | G_{LT} (9.75) (GPa) | | 3,11 | 3,14 | 3,28 | 3,26 | 3,19 |
| Bornes (9.40) à (9.44) | K_{L-} ($= K_L$) (GPa) | | 8,98 | 9,15 | 10,10 | 10,02 | 9,88 |
| | K_{L+} (GPa) | | 22,1 | 25,4 | 120 | 84 | 50 |
| | $G_{TT'-}$ ($= G_{TT'}$) (GPa) | | 3,96 | 4,02 | 4,32 | 4,27 | 4,13 |
| | $G_{TT'+}$ (GPa) | | 11,2 | 12,9 | 52,6 | 36,4 | 19,7 |
| | G_{LT-} ($= G_{LT}$) (GPa) | | 4,57 | 4,67 | 5,14 | 5,06 | 4,83 |
| | G_{LT+} (GPa) | | 13,9 | 16,2 | 62,3 | 43 | 22,2 |
| | E_{T-} ($= E_T$) (GPa) | | 10,8 | 11,0 | 12,0 | 11,9 | 11,5 |
| | E_{T+} (GPa) | | 28,5 | 32,9 | 137 | 95 | 52 |

Les valeurs numériques obtenues (tableau 9.4), comparées aux valeurs expérimentales (tableau 9.2) montrent que :

- le *module d'Young longitudinal* E_L est bien décrit par la loi des mélanges, pour l'ensemble des fibres;
- le *module de cisaillement longitudinal* G_{LT} est bien décrit par la relation (9.75) (ou la borne inférieure (9.42));
- le *module d'Young transverse* E_T est assez bien approché par la relation (9.24) associée aux expressions (9.76), (9.77) et (9.90), pour les fibres de verres et de carbones, bien que les valeurs calculées sous-estiment les valeurs expérimentales lorsque le module d'Young des fibres augmente (verre R, carbones HM et HR).

Par contre, les valeurs expérimentales, obtenues pour le module de cisaillement longitudinal et le module d'Young transverse des composites à fibres de Kevlar, sont très nettement inférieures aux valeurs théoriques. Ces faibles valeurs peuvent être attribuées à :

- une mauvaise adhérence des fibres aramides avec les résines,
- de mauvaises propriétés en compression et cisaillement des fibres aramides,
- une superposition des deux processus.

Les valeurs théoriques trouvées par les approches simplifiées pour le module d'Young transversal et le module de cisaillement longitudinal donnent des valeurs trop faibles. Ce fait est la conséquence du rôle trop important accordé à la matrice dans ces approches simplifiées.

Enfin les valeurs obtenues sur les bornes supérieures montrent que le schéma théorique correspondant est trop éloigné de la réalité. Il conviendrait en fait à une description d'un matériau composite constitué de fibres d'époxy dans une matrice de verre, de carbone ou de Kevlar.

9.5.3 Conclusions

En fonction des résultats précédents, nous retiendrons les expressions théoriques suivantes des modules d'un composite unidirectionnel :

- *module d'Young longitudinal* E_L : loi des mélanges (9.82);
- *coefficient de Poisson longitudinal* ν_{LT} : loi des mélanges (9.90);
- *module de cisaillement longitudinal* G_{LT} : relation (9.75);
- *module de compression latérale* K_L : relation (9.76);
- *module de cisaillement transverse* $G_{TT'}$: relation (9.77);
- *module d'Young transverse* E_T , exprimé à partir des modules précédents à l'aide de l'expression (9.24).

Ces expressions permettent de déterminer la variation des modules en fonction de la proportion de fibres. Les courbes correspondantes sont reportées sur la figure 9.19 pour les composites à fibres de verre E et sur la figure 9.20 pour les composites à fibres de carbone HR.

EXERCICES

9.1 Calculer les constantes de rigidité et de souplesse :

- d'un composite unidirectionnel à fibres de verre :

$$E_L = 45 \text{ GPa}, E_T = 10 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0,31, G_{LT} = 4,5 \text{ GPa}, G_{TT'} = 4 \text{ GPa},$$

- d'un composite unidirectionnel à fibres de carbone :

$$E_L = 230 \text{ GPa}, E_T = 15 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0,36, G_{LT} = 5 \text{ GPa}, G_{TT'} = 4 \text{ GPa}.$$

9.2 Tracer les modules E_L , E_T , G_{LT} et $G_{TT'}$ en fonction de la fraction volumique de fibres de composites unidirectionnels constitués d'une matrice de caractéristiques $E_m = 3 \text{ GPa}$ et $\nu_m = 0,30$ et de fibres de verre-R ($E_f = 86 \text{ GPa}$, $\nu_f = 0,22$).

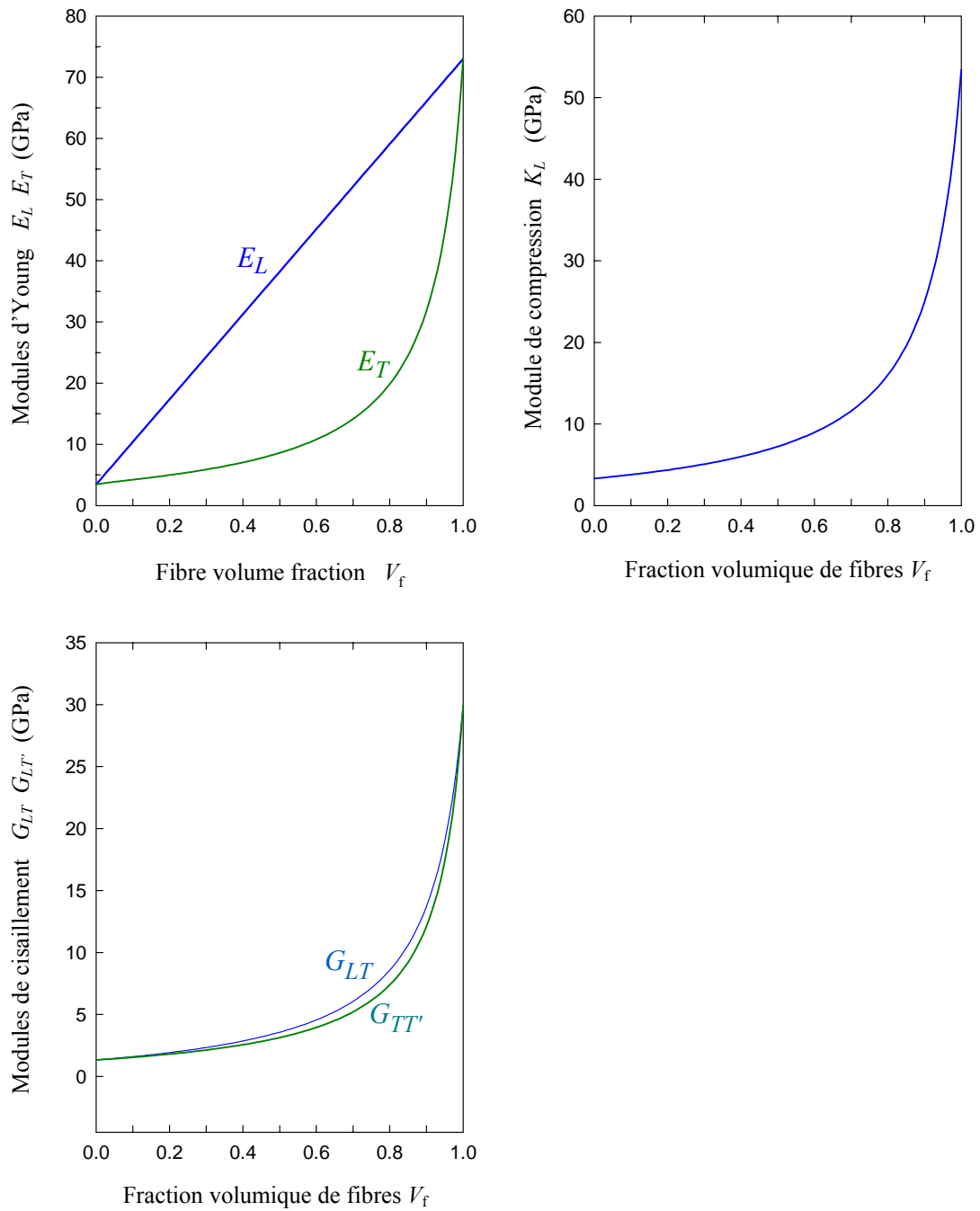


FIGURE 9.19. Variation des différents modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel à fibres de verre E, en fonction de la fraction volumique de fibres.

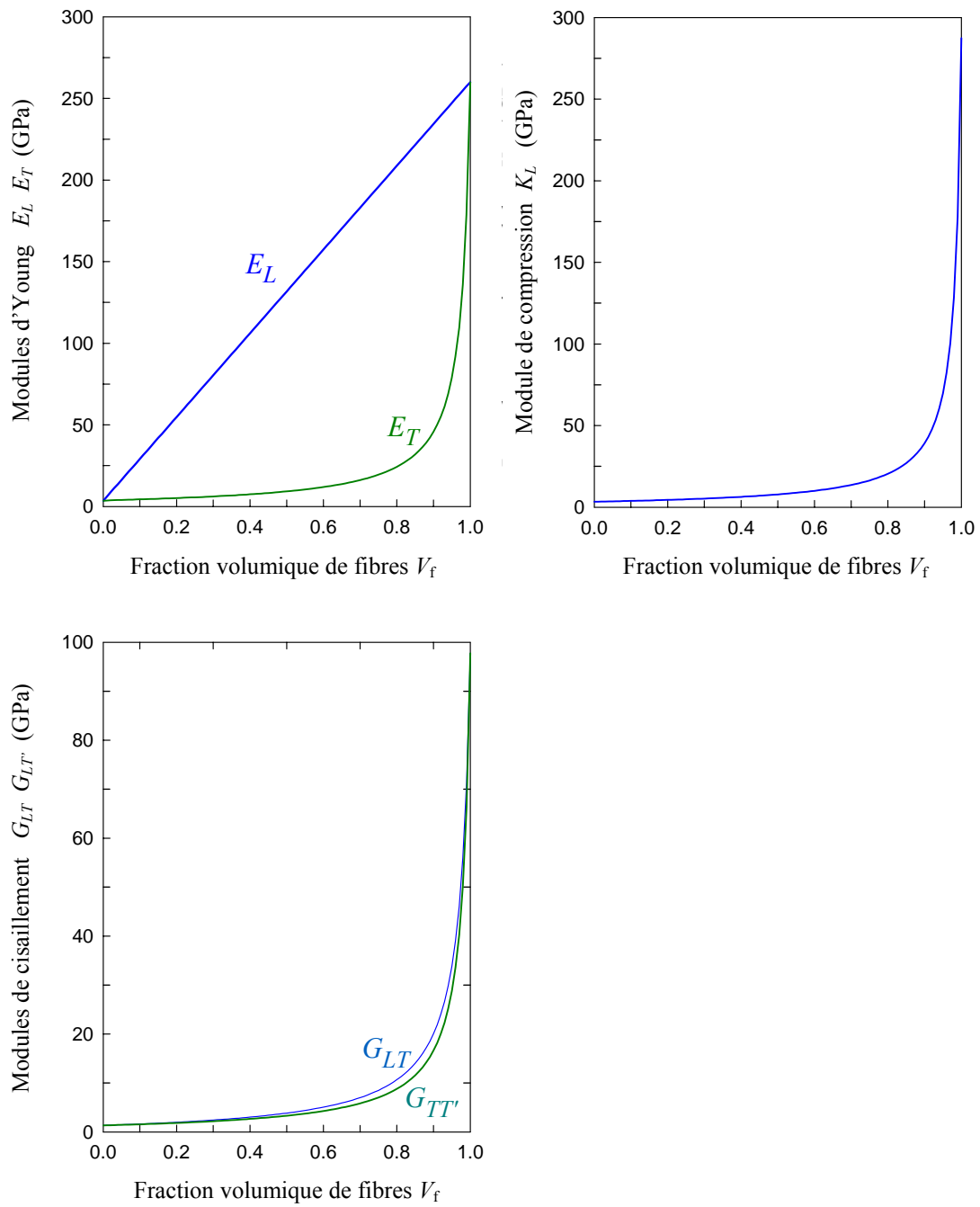


FIGURE 9.20. Variation des différents modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel à fibres de carbone HR, en fonction de la fraction volumique de fibres